Oberlin College Library,
JUL 23 1920
Phys. ha

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 15. November 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 24 am 22. November 1917.

INHALT:

Zum Andenken an Marian v. Smoluchowski. Von A. Sommerfeld. S. 533.

Originalmitteilungen:

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. IV. S. 539.

M. v. Laue, Temperatur- und Dichteschwankungen. S. 542.

A. Hagenbach u. W. Frey, Spektroskopisches über elektrodenlose Ringentladung durch elektrische Schwingungen. S. 544.

M. Siegbahn u. W. Stenström, Über die Röntgenspektren der isotopischen Elemente. S. 547.

K. Uller, Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. III. S. 548.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

G. Mie, Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie. S. 551.

Personalien. S. 556.

Angebote. S. 556.

Gesuche. S. 556.

Zum Andenken an Marian von Smoluchowski.

In Krakau verschied am 5. September d. J. nach kurzem Krankenlager an der Ruhr M. v. Smoluchowski. Wer seine glänzende wissenschaftliche Tätigkeit verfolgt hat, sah in ihm den eigentlichen Erben des Boltzmannschen Geistes der Naturbetrachtung. Mit dem jüngsten Aufschwunge der Atomistik wird sein Name für alle Zeiten verknüpft sein. Aus der Fülle erfolgreicher Arbeit ist er herausgerissen; niemand wird seine geistvolle Art ersetzen können.

M. Smoluchowski

Marian Ritter von Smolan-Smoluchowski wurde am 28. Mai 1872 in Vorder-Brühl bei Wien geboren als Sohn eines hohen Beamten in der Kanzlei des Kaisers Franz Joseph. In Wien besuchte er das Gymnasium und 1890—1894 die Universität, die ihn 1895 promovierte. Seine Lehrer waren Stefan und Exner. Boltzmann hat nur durch seine Schriften auf ihn gewirkt; eine nähere persönliche Berührung hat merkwürdigerweise nie stattgefunden. Enge Freundschaft verband ihn mit Hasenöhrl, der als unmittelbares Opfer des Krieges auf der Hochfläche von Lafraun 1915 gefallen ist; nicht nur wissenschaftliche Interessen, auch gleiche Liebe und Empfindung für Musik und treue Kameradschaft bei Bergtouren und beim Skisport führte beide zusammen.

Die Jahre nach seiner Promotion arbeitete Smoluchowski im Auslande: 1895/6 in Paris unter Lippmann, 1896/7 in Glasgow unter Lord Kelvin, 1897 in Berlin unter Warburg. Von seiner Lehrzeit in Glasgow zeugen einige Arbeiten (5), (6), (7)[1],

1) Die Zahlen weisen auf das nachfolgende Verzeichnis hin.

die er in Gemeinschaft mit Lord Kelvin und Dr. Beattie herausgegeben hat, über die Leitfähigkeit in Gasen, die durch Röntgen- und Uranstrahlen hervorgerufen wird, und über das elektrische Gleichgewicht zwischen Uran und einem bestrahlten Metall. Aus seiner Pariser Zeit stammt eine theoretische Arbeit über Wärmestrahlung im Anschluß an Clausius und eine gleichgerichtete experimentelle Arbeit (3), (4).

Nach der Heimat zurückgekehrt, habilitierte er sich 1898 für Physik in Wien, siedelte aber bald nach Lemberg über, wo er 1900 Extraordinarius, 1903 Ordinarius für theoretische Physik wurde. Mannigfache Ehrenstellungen sowie die Verleihung des Haitinger-Preises der Wiener Akademie legen Zeugnis ab von der Anerkennung, welche die menschlichen und wissenschaftlichen Eigenschaften des jungen Gelehrten allseitig fanden. In der Tat konnte sich schwerlich jemand, der ihm näher treten durfte, dem Zauber seines vornehmen und ästhetisch verfeinerten Wesens entziehen. Von künstlerischem Reiz war auch seine Darstellung in Schrift und Wort; den Teilnehmern an der Naturforscher-Gesellschaft in Münster 1912 und an dem Wolfskehl-Kongresse in Göttingen 1913 sind seine formvollendeten Vorträge in frischem Gedächtnis. 1913 wurde er zum Professor der Experimentalphysik als Nachfolger Witkowskis nach Krakau berufen; er starb als Rektor dieser Universität. Smoluchowski war Mitglied der Krakauer Akademie. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften erwog seine Ernennung zum korrespondierenden Mitgliede, gerade als die Nachricht von seinem Tode eintraf.

So haben wir das Bild eines durch äußere Umstände in jeder Weise begünstigten, harmonischen Gelehrtenlebens vor uns, reich an Erfolg und köstlich durch rastlose Arbeit; um so tiefer fühlen wir das jähe Ende dieses Lebens, das der Wissenschaft noch so viel versprach.

Die wissenschaftliche Eigenart Smoluchowskis tritt in völliger Reife bereits hervor in der Arbeit vom Jahre 1904: „Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie und Zustandsgleichung“ (17), welche ihren würdigen Platz in der Boltzmann-Festschrift gefunden hat. Die Abweichungen vom Mittelwerte, die Schwankungserscheinungen, welche seitdem das Interesse der Physiker in steigendem Maße auf sich gezogen haben, werden hier an dem einfachsten Beispiele, den örtlichen Dichteschwankungen der idealen Gase, vorbildlich behandelt. Durch einfachste Abzählungsmethoden wird gezeigt, daß die Dichte eines Gases nicht überall dieselbe sein kann, daß vielmehr für jedes Teilvolumen Abweichungen vom Durchschnittswerte mit endlicher, durch das Gaußsche Fehlergesetz bestimmter Wahrscheinlichkeit vorkommen. Auch die Entartung dieses Gesetzes für den Fall eines sehr kleinen Teilvolumens, auf welches im Durchschnitt nur noch eine mäßige Zahl von Gasmolekeln entfällt, wird entwickelt — eine Entartung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes, die später für die Deutung der Beobachtungen von Svedberg (44) wichtig werden sollte. Was Smoluchowski hier über den Entropiebegriff sagt, über mikroskopische und makroskopische Energie und über die Grenzen des zweiten Hauptsatzes, liest sich wie ein kurzes Programm seiner späteren umfassenden Ausführungen über denselben Gegenstand. Auch weist er bereits den Weg, wie die Dichteschwankungen physikalisch bestätigt werden können durch ihren Einfluß auf die Zustandsgleichung der wirklichen Gase.

Bald darauf fand er einen viel sichereren Weg zur Bestätigung der Dichteschwankungen durch die Opaleszenz der Gase in der Nähe ihres kritischen Punktes. Indem bei dieser Me-

thode die genauen Hilfsmittel der Optik in den Dienst der Atomistik gestellt werden, gelingt es, die Dichteschwankungen dem Auge unmittelbar sichtbar zu machen und quantitativ zu verfolgen. In seiner ursprünglichen Arbeit (20) verbindet Smoluchowski seine Theorie der Dichteschwankungen mit der berühmten Rayleighschen Formel für das Himmelsblau und kann dadurch die Wahrnehmungen früherer Beobachter über dieses Phänomen bereits in allen wesentlichen Zügen erklären. Auch weist er auf das gleiche Phänomen im kritischen Punkte zweier Lösungen hin. Besondere Annahmen über Kapillarwirkungen im kritischen Zustande, wie sie früher vielfach vorgeschlagen waren, erklärt er als überflüssig und grundlos angesichts der Selbstverständlichkeit, mit der die fraglichen Erscheinungen aus der kinetischen Theorie folgen. Später (31), (32) übernimmt er eine von Einstein herrührende Verbesserung seiner Berechnung der optischen Trübungen, welche die Rayleighsche Hilfsrechnung entbehrlich macht. In dieser verbesserten Form gestattet die Theorie den numerischen Vergleich mit Beobachtungen von Kamerlingh-Onnes und Keesom und findet ihre volle Bestätigung. Dichteschwankungen, Opaleszenz und Brownsche Bewegung sind die drei hervorstechenden Leistungen aus Smoluchowskis früherer Zeit. Die Verleihung des obengenannten Haitinger-Preises wurde ausdrücklich mit diesen drei Leistungen begründet.

Das Rätsel der Brownschen Molekularbewegung hat Smoluchowski im Jahre 1906 gelöst (19), unabhängig von und gleichzeitig mit Einstein. Daß Boltzmann, der doch zu alle dem die Grundlagen gelegt hatte, diese sinnfälligste Folgerung seiner kinetischen Prinzipien nicht selbst gezogen hat, ist, wie Einstein gelegentlich gesprächsweise äußerte, eigentlich zu verwundern. Es ist eine tragische Fügung, daß erst im Todesjahre Boltzmanns diejenige Bestätigung der Atomistik reifte, die alle Zweifler und Gegner verstummen machte. Die Smoluchowskische und die Einsteinsche Ableitung haben jede ihre besonderen Vorzüge. Smoluchowski läßt uns tiefer in den Mechanismus der Zusammenstöße hineinschauen; die Abhängigkeit von der Temperatur, der Teilchengröße, der Viskosität des Suspensionsmittels wird zuverlässig abgeleitet; nur der Zahlenkoeffizient bleibt bei der Schwierigkeit der Mittelungen unsicher. Einstein bemächtigt sich mit kühnem Griff sogleich des Endresultates, ohne sich mit den Einzelheiten des Vorganges aufhalten zu müssen; der Zahlenkoeffizient Einsteins, um 27/64 von dem Smoluchowskis verschieden, steht außer Zweifel. Die ganze Theorie ist seitdem, insbesondere durch Perrin, auf das schönste und allseitigste bestätigt worden. Smoluchowski ist auf dieses Thema wiederholt zurückgekommen, sowohl nach der praktischen Seite hin, mit Rücksicht auf die Ehrenhaftschen, Millikanschen und Brillouinschen Messungen (29), (41), (43) und die Gültigkeitsgrenzen des Stokesschen Gesetzes (33) als auch unter dem Gesichtspunkte, den Gegenstand unter allgemeine statistische Prinzipien einzuordnen (36), (47), (51).

Ganz in Boltzmannscher Richtung liegen die älteren Arbeiten Smoluchowskis über Wärmeleitung in verdünnten Gasen (8), (9), (10), (11), (13), (28). Die Erklärung des Temperatursprunges an der Gefäßwand und seine Verknüpfung mit der freien Weglänge sind zu einem gesicherten Besitz der Wissenschaft geworden. An diese Gedankengänge schließt eine größere Experimentaluntersuchung über die Wärmeleitung in pulverförmigen Körpern an (23), (26). Überhaupt liebte es Smoluchowski und hatte dazu die erforderliche Durchbildung und Spann-

kraft, zwischen theoretischer und experimenteller Arbeit abzuwechseln. Eine vielversprechende experimentelle Arbeit aus letzter Zeit liegt als Voranzeige vor (50): Experimentelle Bestätigung der Theorie des Rayleighschen Himmelsblaus, in der insbesondere die Abhängigkeit der Menge und Polarisation des zerstreuten Lichtes vom Brechungsindex des zerstreuenden Gases untersucht wird, und zwar bei völliger Staubfreiheit desselben und unter normaler Temperatur und Dichte. Wenn diese Voranzeige auch noch keine endgültigen Zahlen gibt, so zeigt sie doch, wie ausgedehnt das Opaleszenzphänomen in der Natur auftritt und wie sicher der zu seiner Erklärung ersonnene Gedankenkreis arbeitet.

Ebenfalls teils theoretisch teils experimentell hat er das geologische Problem der Gebirgsfaltung angegriffen (21), (22), dem er wohl durch seine Liebe zum Bergsteigen zugeführt wurde. Er behandelt es, in Analogie mit der Theorie der Knickung, als Gleichgewicht einer schwimmenden elastischen Platte unter dem Einfluß gleichförmig verteilter Randdrucke, wobei die instabile ebene Form in die stabile gefaltete Form übergeht. Im Modellversuche benutzte er Gelatineplatten auf Quecksilber, Goldplättchen auf Wasser usw. Charakteristisch ist es für den konsequenten Atomistiker, daß er alsbald übergeht zu dünnsten Schellackhäutchen, deren veränderliche Dicke er aus den Farben Newtonscher Ringe entnimmt und somit — von den Gebirgsfalten ausgehend — an der Grenze der molekularen Wirkungssphäre endigt, die er dann hypothetisch aus der Faltenwellenlänge berechnet. Auch über die Gletschererosion (24) hat er nachgedacht.

Außer für die theoretische und prinzipielle Gastheorie interessierte sich Smoluchowski auch für die praktische Gastheorie, die Aerodynamik, deren Gegensätzlichkeit gegenüber der Hydrodynamik er in Abhandlungen über die Methode der dynamischen Ähnlichkeit (15), (16) schön herausgearbeitet hat. Die Komplikation der aerodynamischen Differentialgleichungen, in denen die Temperatur als wesentliche Variable mitzuführen ist, steht ihrer Integration im Wege und verspricht nur Ähnlichkeitsbetrachtungen Erfolg, wie sie für dieses Gebiet von Helmholtz erdacht, aber nicht durchweg glücklich gehandhabt worden sind (man vgl. die diesbezügliche nach Ton und Inhalt vortreffliche Kritik bei Smoluchowski). Solche Ähnlichkeitsbetrachtungen werden nun l. c. auf viele aerodynamische Probleme angewandt und zur Erklärung vorhandener Beobachtungen verwertet.

In den beiden letzten Jahren hatte sich Smoluchowski mit größter Energie der Physik der Kolloide zugewandt. Hier konnte er seine statistische Denkweise erfolgreichst betätigen und unter vorsichtiger Anwendung neuer Hypothesen — elektrische Doppelschichten, Zähigkeitswiderstand bei der Koagulation — bis zu den Einzelheiten der Beobachtung fortschreiten. Die weitschichtige Literatur der Kolloidchemie beherrschte er vollkommen; außerdem stand er in engster wissenschaftlicher Verbindung mit Zsigmondy, der seine Messungen den Smoluchowskischen Fragestellungen anpaßte. Seine Arbeiten, die hauptsächlich in die Kriegszeit fielen (40), (44), (48), (49), (52), ließen eine rasche Förderung dieses schwierigen Gebietes hoffen.

Den ganzen Smoluchowski aber haben wir in den zusammenfassenden Vorträgen (34), (37), (51), in denen von hoher Warte aus die Gesamtheit der Molekularphänomene, insbesondere der Schwankungserscheinungen überblickt wird und als letztes Ziel die Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes ins Auge gefaßt werden. Das Schulbeispiel für diese Be-

trachtungen ist auch hier die Brownsche Bewegung, welche sich der makroskopischen Betrachtung als Diffusion darstellt. „Es ist ganz falsch, wenn manche Forscher meinen, daß dabei noch ein spezieller, Richtung gebender Einfluß — etwa das osmotische Druckgefälle — tätig sei. Der fiktive Begriff des osmotischen Druckes vertritt die Betrachtung der „verborgenen" Molekularbewegung und ist mit derselben vollkommen äquivalent, darf aber mit ihr nicht verquickt werden. Entweder denke man sich die Substanzteilchen passiv durch den osmotischen Druck getrieben, ohne die Brownsche Bewegung zu berücksichtigen, oder man ziehe die letztere in Rechnung, ohne den fiktiven osmotischen Druck einzuführen". Diese Worte bilden eines von vielen Beispielen dafür, mit welcher Klarheit die verschiedenen Methoden dem statistisch geschulten Auge Smoluchowskis erschienen; daß sie uns heute mehr und mehr selbstverständlich erscheinen, ist nicht zum wenigsten sein Verdienst. Außer der Brownschen Bewegung werden alle erreichbaren Schwankungserscheinungen herangezogen, aus der Radioaktivität, der Kolloidchemie, der Elektrochemie bis hin zu eigens erdachten Mechanismen mit Quarzfaden, Spiegel, Sperrklinke und Ventil, wobei stets auch die Grenze der experimentellen Ausführbarkeit überschlagen wird. Mit Rücksicht auf den zweiten Hauptsatz ist das Ergebnis dieses, daß Arbeit tatsächlich auf Kosten von Wärme niederer Temperatur erhalten werden kann, daß Wärme tatsächlich von selbst von niederer zu höherer Temperatur übergehen kann, daß die scheinbar irreversibeln Prozesse tatsächlich reversibel sind. Freilich wird nutzbare Arbeit nicht fortgesetzt aus Wärme gewonnen und die Zeitdauer der Wiederkehr wächst bei einem sogenannten irreversibeln Prozeß ins Unendliche, je mehr man den Bereich der mittleren Schwankung überschreiten will.

Bekanntlich hat Planck den zweiten Hauptsatz als strenges Naturgesetz trotzalledem retten wollen (in einem Leidener Vortrage), indem er ihn etwas anders faßte. Aber Planck ist im Grunde seines Herzens Thermodynamiker; wenn er auch die Statistik durch seine Quantenreform mehr als jeder andere gefördert hat, so ist sie doch nicht die Grundlage seiner Denkweise. Für Smoluchowski aber war die Statistik Lebensluft; ihm stellt sich daher der zweite Hauptsatz als ein Annäherungsgesetz dar, das die Natur in ihren feinsten Äußerungen überall um ein kleines durchbricht und das nur relativ zu unserem technischen Unvermögen gilt. A. Sommerfeld.

Verzeichnis der in deutscher, englischer oder französischer Sprache erschienenen Abhandlungen Smoluchowskis.

1893.

1. Über die innere Reibung in nicht wässerigen Lösungen. 5 SS. (Sitzungsberichte der Wien. Akad. **102**.)

1894.

2. Akustische Untersuchungen über die Elastizität weicher Körper. 35 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **103**.)

1896.

3. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant. 3 SS. (Comptes Rendus de l'Acad. Paris **122**.)
4. Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation. 16 SS. (Journal de Physique **5**.)

1897.

5. Dr. Beattie and Dr. Smoluchowski: Conductance produced in gases by Röntgen rays, by ultraviolet light, and by uranium, and some consequences thereof. 19 SS. (Philosophical Magazine **43**.)
6. Lord Kelvin, Dr. Beattie, Dr. Smoluchowski: Experiments on the electrical phenomena produced in gases by Röntgen rays, by ultraviolet light and by uranium. 35 SS. (Proceedings Edinbourgh Roy. Soc. **21**.)

1898.

7. Lord Kelvin, Dr. Beattie, Dr. Smoluchowski: On the electrical equilibrium between uranium and an insulated metal in its neighbourhood. 2 SS. (Philosophical Magazine **45**.)

8. Über Wärmeleitung in verdünnten Gasen. 29 SS. (Wied. Annal. d. Physik **64.**)
9. Über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. 26 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **107.**)
10. On conduction of heat in rarefied gases. 14 SS. (Philosoph. Magazine **46.**)
11. Neuere Untersuchungen über die Wärmeleitung in Gasen. (Österr. Chemiker-Zeitung **2.**)

1899.

12. Etherion, a new gas. 2 SS. (London, Nature **59.**)
13. Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. 19 SS. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **108.**)

1901.

14. Über die Atmosphäre der Erde und der Planeten. 6 SS. (Diese Zeitschr. **2**, 307—313.)

1903.

15. Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent (Bull. Acad. Crac. **43.**)

1904.

16. On the principles of aerodynamics and their application, by the method of dynamical similarity, to some special problems. 14 SS. (Philos. Magazine **7.**)
17. Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie u. Zustandsgleichung. 15 SS. (Boltzmann-Festschrift.)

1905.

18. Zur Theorie der elektrischen Kataphorese und der Oberflächenleitung. 2 SS. (Diese Zeitschr. **6**, 529—531.)

1906.

19. Zur kinetischen Theorie d. Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. 24 SS. (Ann. d. Phys. **21.**)

1908.

20. Molekularkinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen. (Ann. d. Phys., **25**, 205—226.)

1909.

21. Über ein gewisses Stabilitätsproblem der Elastizitätslehre u. dessen Beziehung zur Entstehung von Faltengebirgen. (Bull. Acad. Crac. Juni 1909, S. 3—20.)
22. Versuche über Faltungserscheinungen schwimmender, elastischer Platten. (Bull. Acad. Crac. November 1909, S. 727—734.)

1910.

23. Sur la conductibilité calorifique des corps pulvérisés. (Bull. Acad. Crac., Mai 1910, p. 129—153.)
24. Sur la théorie mécanique de l'érosion glaciaire. (Comptes Rendus **150**, 1368—1371.)
25. Zur kinetischen Theorie der Transpiration und Diffusion verdünnter Gase. (Ann. d. Phys. **33**, 1559—1570.)
26. Über Wärmeleitung pulverförmiger Körper und ein neues hierauf gegründetes Wärme-Isolierungsverfahren. 7 SS. (II. Internat. Kältekongreß, Wien.)

1911.

27. Bemerkung zur Theorie des absoluten Manometers von Knudsen. (Ann. d. Phys. **34**, 182—184.)
28. Some remarks on conduction of heat through rarefied gases. (Phil. Mag. **21**, 11—14.)
29. Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. (Bull. Acad. Crac. Januar 1911, S. 28—29.)
30. Zur Theorie der Wärmeleitung in verdünnten Gasen und der dabei auftretenden Druckkräfte. (Bull. Acad. Crac., Juli 1911, S. 432—453.)
31. Beitrag zur Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande. (Bull. Acad. Crac., Oktober 1911, S. 493—502.)

1912.

32. On opalescence of gases in the critical state. (Phil. Mag. **23**, 165—173.)
33. On the practical applicability of Stokes Law of resistance and the modifications of it required in certain cases. (International Congress of Mathematics. at Cambridge.)
34. Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene. (Diese Zeitschr. **13**, 1069—1080.)

1913.

35. Anzahl und Größe der Moleküle und Atome. (Scientia, **13**, 12—29.)
36. Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte. (Bull. Acad. Crac., S. 418—437.)
37. Göttinger Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und Elektrizität: Gültigkeitsgrenzen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. Teubner, Leipzig, S. 89—121. (Diese Zeitschr. **14**, 261—262).

1914.

38. Elektrische Endosmose und Strömungsströme. Graetzs Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. (Barth, Leipzig. II. Band. S. 366—428.)
39. Bemerkungen zu der Arbeit Banlis: Theoretische Behandlung der Erscheinungen in verdünnten Gasen. (Ann. d. Phys. **45**, 623—624.)
40. Studien über Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **123**, 2381—2405.)

1915.

41. Über „durchschnittliche maximale Abweichung" bei Brownscher Molekularbewegung und Brillouins Diffusionsversuche. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **124**, 263—276.)
42. Molekulartheoretische Studien über Umkehr thermodynamischer irreversibler Vorgänge und über Wiederkehr abnormaler Zustände. (Sitzungsber. d. Wien. Akad. **124**, 339—368.)
43. Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung. (Diese Zeitschr. **16**, 318—321.)
44. Über die zeitliche Veränderlichkeit der Grup-

pierung von Emulsionsteilchen und die Reversibilität der Diffusionserscheinungen. (Diese Zeitschr. **16**, 321—327.)
45. Über gewisse Mängel in der Begründung des Entropiesatzes und der Boltzmannschen Grundgleichung in der kinetischen Gastheorie. (Bull. Acad. Crac., S. 164—178.)
46. Zur Theorie der Zustandsgleichungen. (Ann. d. Phys. **48**, 1098—1102.)
47. Über Brownsche Molekularbewegung unter Einwirkung äußerer Kräfte und deren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Diffusionsgleichung. (Ann. d. Phys. **48**, 1103—1112.)

1916.

48. Studien über Kolloidstatistik und den Mechanismus der Diffusion. (Kolloid-Zeitschr. **18**, 48—54.)
49. Theoretische Bemerkungen über die Viskosität der Kolloide. (Kolloid-Zeitschr. **18**, 190—195.)
50. Experimentelle Bestätigung der Theorie Lord Rayleighs, betreffend die Natur des Himmelblaus. (Vorläufige Mitteilung. Bull. Acad. Crac., S. 219—222.)
51. Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. (Diese Zeitschr. **17**, 557—571 und 585—599.)

1917.

52. Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. (Zeitschrift f. phys. Chemie, **92**, 129—168.)
53. Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit und das Gesetz des Zufalls in der theoret. Physik. (Im Manuskript.)

Etwa 35 Arbeiten in polnischer Sprache, darunter ein zusammenfassender Bericht über Brownsche Bewegung in der Witkowski-Festschrift und ein großes didaktisches Werk „Ratgeber für das Selbststudium" konnten hier wegen der Satzschwierigkeiten nicht aufgeführt werden.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

IV.

Ponderomotorische Wirkungen auf einfach zusammenhängende Körper. Grundlegung der Elektrostatik.

Bei der grundsätzlichen Voraussetzung, daß in dem elektromagnetischen Felde mechanische Geschwindigkeiten u, v, w von der Form

$$\left.\begin{aligned} \mu u &= \mu_1\left(u_0 + u_1\cos\frac{t}{T}2\pi + u_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right),\\ \mu v &= \mu_0\left(v_0 + v_1\cos\frac{t}{T}2\pi + v_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right),\\ \mu w &= \mu_0\left(w_0 + w_1\cos\frac{t}{T}2\pi + w_2\sin\frac{t}{T}2\pi\right)\end{aligned}\right| \quad (1)$$

vorhanden sind (μ Dichte, μ_0 die konstante mittlere Dichte, T eine sehr kleine Zeitdauer), haben wir aus dem mechanischen Grundprinzip (Abh. I[1]) und der Annahme des universellen Dralles (Abh. II[2]) die Differentialgleichungen abgeleitet, denen

$$u_1, v_1, w_1;\ u_2, v_2, w_2$$

genügen müssen und diese Differentialgleichungen in eine für die Anwendungen geeignete Form transformiert (Abh. III[1]).

Nun wenden wir uns der Bestimmung der sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 zu, die wir bisher als in bestimmter Weise gegeben ansahen.

Das mechanische Grundprinzip, unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z} = 0$$

durch den Druckmultiplikator, liefert für inkompressible Medien die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}\sum\Big[\delta x\Big\{\mu\frac{du}{dt}\overline{d\tau} + 2\int_{\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta,t)\Big(u(\xi,\eta,\zeta,t)\\ - u_0(x,y,z,t)\Big)\Big|\hat{u}_\nu\, d\omega\Big\}\\ + \ldots - p\Big(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\Big)\overline{d\tau}\Big] = 0,\end{aligned}\right| \quad (2)$$

aus der wir früher die Differentialgleichungen des Feldes ableiten konnten. Wir betrachten gesondert ein Element $\overline{d\tau}$, mit der Oberfläche Ω und einem inneren Punkte $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ und den Außenraum a des Elements, wobei für die relativen Verrückungen im Innern des Elements $\overline{d\tau}$ noch Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden könnten, und wir schreiben daher die Gleichung des mechanischen Grundprinzips so:

1) Diese Zeitschr. **18**, 323, 1917.
2) Diese Zeitschr. **18**, 341, 1917.

1) Diese Zeitschr. **18**, 504, 1917.

$$\left.\begin{aligned}
&\Big\{\mu\frac{du}{dt}d\tau+2\int_{\bar\Omega}\mu\,(\xi,\eta,\zeta,t)\\
&\quad\Big\{u(\xi,\eta,\zeta,t)-u_0(x,y,z,t)\Big\}\hat u\;d\omega\Big\}\delta x+\cdots\\
&+\int_a\Big[\Big\{\mu\frac{du}{dt}d\tau+2\int_{\bar\Omega}\mu(\xi,\eta,\zeta,t)\\
&\quad\Big\{u(\xi,\eta,\zeta,t)-u_0(x,y,z,t)\Big\}\hat u_\nu d\omega\Big\}\delta x+\cdots\\
&+\Big\{\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\Big)\overline{d\tau}\Big]\\
&-\int_{\bar\Omega}p\Big\{\cos(\nu x)\delta\xi+\cos(\nu y)\delta\eta+\cos(\nu z)\delta\zeta\Big\}\\
&\qquad d\omega=0,
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

wobei etwa hinzuzufügende Bedingungen über die relativen Verrückungen im Innern von $\overline{d\tau}$ noch durch Multiplikatoren einzuführen wären. Wenn wir die Dimensionen des Elementes $\overline{d\tau}$ immer kleiner wählen, können wir mit umso größerer Genauigkeit die folgende Gleichung zugrunde legen:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big\{\mu\frac{du}{dt}-2\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial u}{\partial z}\hat w\Big)\\
&-2\mu\hat u\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial x}+\frac{\partial\hat v}{\partial y}+\frac{\partial\hat w}{\partial z}\Big)\Big\}\overline{d\tau}\,\delta\bar x+\cdots\\
&+\int_a\Big[\Big\{\mu\frac{du}{dt}-2\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial u}{\partial z}\hat w\Big)\Big\}\delta x+\cdots\Big]d\tau\\
&+\int_a\Big(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\cdots\Big)d\tau\\
&-\int_{\bar\Omega}p\cos(\nu x)\,d\omega\,\delta\bar x-\cdots=0
\end{aligned}\right\}\quad(3')$$

[1]

und erhalten durch Nullsetzung der Faktoren von $\delta\bar x$, $\delta\bar y$, $\delta\bar z$:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\frac{du}{dt}=&\frac{\int_{\bar\Omega}p\cos(\nu x)\,d\omega}{\overline{d\tau}}\\
&+2\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial u}{\partial z}\hat w\Big)\\
&+2\mu\hat u\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial x}+\frac{\partial\hat v}{\partial y}+\frac{\partial\hat w}{\partial z}\Big),\ldots,
\end{aligned}\right\}\quad(4a)$$

und im Außenraume durch Nullsetzung der Faktoren von δx, δy, δz:

$$\mu_0\frac{du}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu_0\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial u}{\partial z}\hat w\Big),\cdots\quad(4b)$$

1) Im Außenraume setzen wir Inkompressibilität voraus.

Die Gleichungen (4b) sind uns bereits bekannt; die Gleichung (4a) ist insofern etwas allgemeiner, als sie sich auf ein Element $\overline{d\tau}$ bezieht, in dessen Innern die relativen Verrückungen noch irgendwelchen Beschränkungen unterworfen sein können, die wir für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in dieser Form gar nicht zu kennen brauchen.

Während wir früher aus den Bewegungsgleichungen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes durch Nullsetzung der Kosinus- und Sinusterme ableiteten, interessiert uns jetzt die Bestimmung der sichtbaren Bewegung. Die Ausdrücke für die scheinbaren Kräfte, welche auf das Element $\overline{d\tau}$ wirken, sind:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{d}X_0=&\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\mu\frac{du}{dt}\overline{d\tau}\,dt\\
=&\frac{1}{T}\mu\overline{d\tau}\Big\{u(t+T)-u(t)\Big\},\cdots;
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

denn das sind die Produkte der Masse des Teilchens mit seinen sichtbaren Beschleunigungen; nach (4a) sind mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial u}{\partial z}\hat w\Big)d\tau\,dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\mu\Big(\frac{\partial\hat u}{\partial x}\hat u+\frac{\partial\hat u}{\partial y}\hat v+\frac{\partial\hat u}{\partial z}\hat w\Big)d\tau\,dt,\cdots,$$

diese scheinbaren Kräfte durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\overline{d}X_0=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_{\bar\Omega}\Big(p\cos(\nu x)-2\mu_0\hat u\hat u_\nu\Big)d\omega\,dt,\cdots\quad(6)$$

Wir werden diese Formeln auch auf ausgedehnte Körper übertragen können: Wir denken uns in irgendeinem Körper ponderable Materie von wesentlich größerer Dichte als μ, aber in solcher Weise, daß die Zwischenräume, deren Volumen erheblich größer ist, als das Volumen der ponderablen Materie, von unserer Materie mit der Dichte μ erfüllt sind. Wir wollen die Untersuchung hier nicht dadurch komplizieren, daß wir, wie dies in der Theorie der universellen Schwingungen geschieht, die etwaigen Kraftwirkungen zwischen ponderablen Teilchen unter sich (z. B. infolge der universellen Eigenschwingungen) mitanalysieren, wir legen vielmehr den idealen Fall zugrunde, daß die Verrückungen der ponderablen Teilchen den Bedingungen starrer Verrückungen genügen; dann werden die scheinbaren Kräfte, welche auf einen endlich ausgedehnten, sichtbar starren Körper wirken, entsprechend die in Wirkung kommenden

Drehungsmomente, so zu berechnen sein, als ob auf jedes Element die scheinbaren Kräfte (6) wirkten, im besonderen werden die translatorischen Kräfte:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \left(p\cos(\nu x) - 2\mu_0\,\hat{u}\hat{u}_\nu\right) d\omega\,dt\,,\ldots, \tag{7}$$

wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche ω des Körpers mit der inneren Normalen ν vorstellt[1]).

Wir werden in dieser Abhandlung den wichtigen Fall behandeln, in welchem in dem Außenraume beliebig vieler einfach zusammenhängender Körper für die schwingenden Geschwindigkeiten Wirbellosigkeit besteht:

$$\hat{u} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\,,\quad \hat{v} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\,,\quad \hat{w} = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\,, \tag{8}$$

im Außenraume, und in welchem die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 nicht außerordentlich groß sind.

Dann sind die Glieder von p, welche für die Integrale (7) in Betracht kommen:

$$+\mu_0\left\{\frac{d\hat{\psi}}{dt} + \frac{3}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\right\},$$

denn es ergibt sich durch Differentiation dieses Ausdruckes bzw. nach x, y, z:

$$-\mu_0\left\{\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} + \hat{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{w}\frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right.$$
$$\left. + v\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + w\frac{\partial\hat{w}}{\partial x} - 3\left(\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \hat{v}\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + \hat{w}\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right)\right\}$$
$$= -\mu_0\left\{\frac{d\hat{u}}{dt} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{w}\right)\right\} + N,\cdot\cdot,$$

wo wir unter N Größen verstehen, welche deshalb nicht in Betracht kommen, weil sie bei ihrer Berücksichtigung in den Integralen (7) durch die Operation

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(-)\,dt$$

herausfallen.

Bedenken wir noch, daß bis auf Größen, die aus demselben Grunde nicht in Betracht kommen:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \frac{\partial\hat{\psi}}{dt}\cos(\nu x)\,d\omega\,dt$$
$$= -\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \hat{\psi}\,\frac{d}{dt}\left[d\omega\cos(\nu x)\right] dt\,,\cdot\cdot,$$

und daß ferner die Formeln bestehen:

$$\frac{d}{dt}\left(d\omega\cos(\nu x)\right) = -\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\cos(\nu x)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y) + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right)_a^{1)} d\omega\,,\cdot\cdot,$$

so ergibt sich

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \mu_0\left[\frac{3}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\cos(\nu x) - 2\hat{u}\hat{u}_\nu\right.$$
$$+ \hat{\psi}\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y)\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right)_a\right] d\omega\,dt\,,\cdots \tag{9}$$

Nach dem Stokesschen Satze ist, mit Rücksicht darauf, daß wir es mit einfach zusammenhängenden Körpern zu tun haben:

$$\int_\omega \hat{\psi}\left\{\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\cos(\nu y)\right\} d\omega$$
$$= -\int_\omega \hat{v}\left\{\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\cos(\nu y)\right\} d\omega\,,\cdot\cdot,$$
$$\int_\omega \hat{\psi}\left\{\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\cos(\nu z)\right\} d\omega$$
$$= -\int_\omega \hat{w}\left\{\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\cos(\nu z)\right\} d\omega;\,\cdot\cdot,$$

und so folgen aus (9) die wichtigen Formeln für X_0, Y_0, Z_0:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\omega \mu_0\left\{\frac{1}{2}\left(\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2\right)\cos(\nu x)\right.$$
$$\left. - \hat{u}\hat{u}_\nu\right\} d\omega\,,\cdots \tag{10}$$

Wir können das Resultat aussprechen:

Die infolge des elektromagnetischen Feldes auf einen einfach zusammenhängenden Körper τ ausgeübten sichtbaren Kräfte:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_\tau \mu\,\frac{du}{dt}\,d\tau\,dt\,,\cdot\cdot \tag{I}$$

sind durch die Formeln gegeben:

$$X_0 = \frac{1}{2}\mu_0\int_\omega\left\{\frac{1}{2}\left(u_1^2+v_1^2+w_1^2\right)\cos(\nu x) - u_1u_{1\nu}\right\} d\omega$$
$$+ \frac{1}{2}\mu_0\int_\omega\left\{\frac{1}{2}\left(u_2^2+v_2^2+w_2^2\right)\cos(\nu x) - u_2u_{2\nu}\right\} d\omega,\cdot, \tag{II}$$

unter der Voraussetzung, daß an der Außenseite der Oberfläche ω des Raumes

1) Man beachte die infolge der Individualitätskorrektur hinzukommenden Glieder
$$-2\mu_0\hat{u}\hat{u}_\nu\,,\ldots$$

1) Der Index a bedeutet, daß die Werte an der äußeren Seite von ω zu wählen sind.

τ für die Schwingungsgeschwindigkeiten Wirbellosigkeit besteht:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \ldots,$$
$$u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \ldots,$$

und daß die sichtbaren Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 nicht außerordentlich groß sind (alle gewöhnlichen, irdischen translatorischen Geschwindigkeiten können in diesem Sinne als nicht außerordentlich groß aufgefaßt werden).

Da wir alle Geschwindigkeiten als stetig und differenzierbar voraussetzen wollen, können wir den Formeln (II) auch die folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned} X_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big(& u_1\theta_1 - \Big\{ v_1\Big[\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big] \\ & - w_1\Big[\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\Big]\Big\}\Big) d\tau \\ - \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big(& v_2\Big[\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big] \\ & - w_2\Big[\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\Big]\Big) d\tau, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (II')$$

Jetzt wollen wir für die Grundlegung der Elektrostatik eine große Anzahl ruhender bzw. sich nicht mit außerordentlich großer translatorischer Geschwindigkeit bewegender Elektronen in einem unendlichen Äther annehmen; im ganzen Raume soll

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \ldots, \\ u_2 &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

sein, daher im Außenraume der Elektronen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= 0, \\ \Delta\psi_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

im Innenraume:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= -\theta_1, \\ \Delta\psi_2 &= -0 \end{aligned}\right\} \quad (12b)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} u_2 = v_2 = w_2 &= 0, \\ u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad v_1 &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi}\sum \int_{\tau_i} \theta_1(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \quad (14)$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Die scheinbare Kraft, welche nach (II) ein den Raum τ erfüllendes Elektron auf ein den Raum τ' erfüllendes Elektron ausübt, hat unter der Voraussetzung, daß die Zentraldistanz

$$\varrho = \sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}$$

der beiden Teilchen gegen ihre Dimensionen groß ist, die Komponenten:

$$X_0 = -\frac{\partial}{\partial \xi'}\Big\{\frac{1}{8\pi\varrho}\int_\tau \theta_1 d\tau \int_{\tau'} \theta_1 d\tau\Big\}, \ldots, \quad (15)$$

oder wenn man

$$\left.\begin{aligned} e &= \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\int_\tau \theta_1 d\tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \\ &\qquad \int_\tau \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\Big) d\tau, \\ e' &= \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\int_{\tau'} \theta_1 d\tau = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \\ &\qquad \int_{\tau'} \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\Big) d\tau \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

setzt, die Komponenten:

$$X_0 = -\frac{\partial}{\partial \xi'}\Big(\frac{ee'}{4\pi\varrho}\Big).$$

Durch (16) ist die elektrische Masse e eines Elektrons in ganz bestimmter Weise mechanisch definiert, ich wähle absichtlich das in vieler Beziehung sehr bequeme Maßsystem, welches stets von Lorentz verwandt wird[1].

1) Bei Benutzung des elektrostatischen Maßsystems wäre

$$e = \sqrt{\frac{\mu_0}{8\pi}}\int_\tau \theta_1 d\tau, \quad (16)$$

zu setzen.

(Eingegangen 28. September 1917.)

Temperatur- und Dichteschwankungen.

Von M. v. Laue.

Im 17. Hefte dieser Zeitschrift zeigt Herr Fürth im Anschluß an eine Veröffentlichung von Herrn Frank[1]), wie man, ausgehend von der van der Waalsschen Zustandsgleichung und der Voraussetzung konstanter spezifischer Wärme, aus dem zugehörigen Entropieausdruck nach dem Boltzmannschen Prinzip das Wahrscheinlichkeitsgesetz der freiwilligen Schwankungen der Temperatur und Dichte ermitteln kann. Seine Ergebnisse sind aber von seinen besonderen Annahmen unabhängig und lassen sich, wie wir hier kurz darlegen wollen, sogar mit weniger Rechnung ohne diese ableiten.

Wir denken uns dazu einen beliebigen chemisch einheitlichen Körper auf gegebener Energie U und gegebenem Volumen V gehalten. Im

1) Ph. Frank, „Lotos" Naturw. Zeitschr. **64**, 1916; R. Fürth, diese Zeitschr. **18**, 395, 1917.

Raumelement $d\tau$ sollen $n d\tau$ Mole liegen, s, u, $v = 1/n$ sollen Entropie, Energie und Volumen eines Mols sein, S die Gesamtentropie. Der normale, den Werten U und V zugehörige Gleichgewichtszustand maximaler Entropie entspricht den Werten n_0, s_0, u_0 und der Temperatur T_0. ν und t sind die Abweichungen, die n und T von diesen Normalwerten zeigen:

$$n = n_0 + \nu, \quad T = T_0 + t.$$

Für die Abweichungen der Molenergie und -entropie können wir uns im allgemeinen (eine Ausnahme tritt im kritischen Punkt ein) mit den linearen und quadratischen Gliedern der Reihenentwicklung begnügen:

$$s - s_0 = \frac{\partial s}{\partial n}\nu + \frac{\partial s}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\nu t\right) + \cdots \quad (1)$$

$$u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial n}\nu + \frac{\partial u}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n}\nu^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial T}t^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial T}\nu t\right) + \cdots \quad (2)$$

Die Differentialquotienten beziehen sich hier und im folgenden, auch ohne daß wir ihnen den Index o geben, auf den Normalzustand. Für die Gesamtentropie und die Energie sind die Abweichungen:

$$S - S_0 = \int n (s - s_0)\, d\tau = \int (n_0 + \nu)\left(\frac{\partial s}{\partial n}\nu + \frac{\partial s}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\nu t\right)\right) d\tau$$

$$= \int \left\{ n_0 \frac{\partial s}{\partial n}\nu + n_0 \frac{\partial s}{\partial T}t + \left(\frac{\partial s}{\partial n} + \frac{1}{2} n_0 \frac{\partial^2 s}{\partial n^2}\right)\nu^2 + \frac{1}{2} n_0 \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}t^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial T} + n_0 \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T}\right)\nu t \right\} d\tau \quad (1')$$

$$U - U_0 = \int n (u - u_0)\, d\tau = \int (n_0 + \nu)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\nu + \frac{\partial u}{\partial T}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\nu^2 + \frac{\partial^2 n}{\partial T^2}t^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial T}\nu t\right)\right) d\tau$$

$$= \int \left\{ n_0 \frac{\partial u}{\partial n}\nu + n_0 \frac{\partial u}{\partial T}t + \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2} n_0 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right)\nu^2 + \frac{1}{2} n_0 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}t^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial T} + n_0 \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial T}\right)\nu t \right\} d\tau . \quad (2')$$

Nach Voraussetzung ist

$$U - U_0 = 0; \quad (3)$$

eine weitere Nebenbedingung ist

$$\int n d\tau = \int n_0 d\tau, \text{ also } \int \nu d\tau = 0. \quad (4)$$

Aus der Gleichung

$$ds = \frac{du + p\,dv}{T} = \frac{du - p/n^2 dn}{T}$$

folgen aber die Beziehungen:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial T}, \quad \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{p}{n^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial T^2} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{2p}{n^3} - \frac{1}{n^2}\frac{\partial p}{\partial n}\right),$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 n}{\partial n \partial T}.$$

Multiplizieren wir also Gleichung (2') mit $1/T_0$ und subtrahieren wir sie von (1'), so finden wir in Rücksicht auf (3) und (4):

$$S - S_0 = -\int \left(\frac{1}{2 n_0 T_0}\frac{\partial p}{\partial n}\nu^2 + \frac{n_0}{2 T_0^2}\frac{\partial u}{\partial T}t^2\right) d\tau$$

$$= -\sum \left(\frac{1}{2 n_0 T_0}\frac{\partial p}{\partial n}\overline{\nu^2} + \frac{n_0}{2 T_0^2} c_v \overline{t^2}\right) \Delta\tau . \quad (5)$$

$\overline{\nu^2}$ und $\overline{t^2}$ sind dabei Raummittelwerte für die Teilbereiche $\Delta\tau$.

Aus dem Boltzmannschen Prinzip,

$$W = C \cdot e^{\frac{S - S_0}{k}},$$

ersehen wir hiernach, daß die Schwankungen der Temperatur und Dichte voneinander unabhängig erfolgen. Das Zeitmittel dieser räumlich schon gemittelten Schwankungen ist:

$$\overline{\nu^2} = \frac{k n_0 T_0}{\frac{\partial p}{\partial n}\Delta\tau} = -\frac{k T_0}{v_0^3 \frac{\partial p}{\partial v}\Delta\tau}, \quad \overline{t^2} = \frac{k T_0^2}{n_0 c_v \Delta\tau}. \quad (6)$$

Zu den schon von Herrn Fürth angeführten Folgerungen aus diesen Formeln fügen wir hier noch eine über Energieschwankung der in $\Delta\tau$ normalerweise enthaltenen Substanzmenge $n_0 \Delta\tau$ hinzu. Begnügen wir uns in (2) mit den linearen Gliedern, so finden wir:

$$\overline{(u - u_0)^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \overline{\nu^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)^2 \overline{t^2}.$$

Nähmen wir nur auf die Temperaturschwankungen Rücksicht, so vereinfachte sich dies wegen (6) zu

$$(n_0 \Delta\tau)^2 \overline{(u - u_0)^2} = k (n_0 \Delta\tau\, c_v) T_0^2,$$

1) Gegen diesen Schluß könnten vielleicht Bedenken entstehen, da die Dichteschwankungen ν an die Bedingung (4) geknüpft sind, also die auf die verschiedenen Volumenelemente $\Delta\tau$ bezüglichen ν nicht unabhängig voneinander sind. Umfaßt das Gesamtvolumen V aber sehr viele Elemente $\Delta\tau$, so können wir mit einem prozentisch verschwindenden Fehler bei der Summation eins davon weglassen; in den übrigen sind dann die ν unabhängig voneinander.

was mit länger bekannten Ergebnissen übereinstimmt[1]), da $n_0 \Delta\tau c_v$ die spezifische Wärme der Substanzmenge $n_0 \Delta\tau$ ist. Ohne diese Beschränkung aber ist in Hinblick auf die Formeln[2])

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\frac{\partial p}{\partial T} - p,$$

und

$$c_p = c_v + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

nach (6) für die Energie der Substanzmenge $n_0 \Delta\tau$ zu setzen:

$$\begin{aligned}(n_0 \Delta\tau)^2 \overline{(u-u_0)^2} &= k n_0 \Delta\tau\, T_0 \\ &\left(c_v T_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T\right) \\ &= k n_0 \Delta\tau\, T_0 \\ &\left(c_p T_0 - 2p_0 T_0\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - p_0^2\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Man darf in den Gleichungen (6) und (7) keineswegs $\Delta\tau$ unter alle Grenzen abnehmen lassen und auf ein Unendlichwerden der Schwankungen schließen; $\Delta\tau$ muß nämlich immer noch so groß bleiben, daß es sehr viele Moleküle umfaßt, da man sonst Dichte und Temperatur überhaupt nicht definieren kann. Sonst aber sind diese Schwankungen um so größer, je kleiner man $\Delta\tau$ wählt; und es ist eine völlige Verkennung des Sachverhalts, wenn sich in der Literatur der Wunsch nach einer Berechnung der linearen Dimensionen der Dichteschwankungen findet.

1) Vgl. z. B. A. Einstein, Rapports et discussions de la reunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911 sous les auspices de M. E. Solvay (Paris 1912) S. 421.

2) Vgl. z. B. M. Planck, Thermodynamik, S. 128; ferner Gleichung 80, 82.

(Eingegangen 28. September 1917.)

Spektroskopisches über elektrodenlose Ringentladung durch elektrische Schwingungen.

Von A. Hagenbach und W. Frey.

Durch die folgende Mitteilung wird gezeigt, daß die elektrodenlose Ringentladung[1]) eine wertvolle neue spektroskopische Methode ist, die sich auf viele Substanzen anwenden läßt und die noch an Wert gewinnen wird, wenn man die von Wachsmuth und Winaver[2]) angegebene Methode zur Messung der Leitfähigkeit mit hinzunimmt. Unsere Versuchsbedingungen zur Erzeugung der Ringentladung waren folgende: Mit jedem der Pole eines 75 cm-Klingelfußinduktors waren die inneren Belege je dreier Leydener Flaschen verbunden, während die äußeren geerdet waren. Die inneren Belege wurden über eine Zinkfunkenstrecke durch einen Draht verbunden, der in zwei oder mehr Windungen um eine kugelige Röhre gelegt war. Die Kapazität der Flaschen betrug bei dieser Schaltung 2800 cm. Zum Betrieb diente Gleichstrom von 220 Volt und ein mechanischer Unterbrecher. Die Röhre wurde mit der Gaedeschen Quecksilberpumpe verbunden und mit der Substanz gefüllt, die untersucht werden sollte. Die verwendeten Röhren waren Glaskugeln von 12 oder 14 cm Durchmesser oder eine Quarzröhre von 7 cm. In gewissen Fällen benutzten wir etwa 40 cm lange Glasröhren von 1,5 cm Durchmesser mit vorn leicht aufgeblasenem Ende zur Längsdurchsicht. Letztere wurden auf etwa 20 cm mit einer Wickelung versehen, durch die die elektrischen Schwingungen zirkulierten. Wollte man die Temperatur in meßbarer Weise verändern, so wurde die Röhre in ein mit Paraffinöl gefülltes Becherglas getaucht, um das die Wickelung zur Aufnahme der elektrischen Schwingungen geführt wurde.

Die spektroskopischen Aufnahmen wurden vorläufig im sichtbaren Gebiet vom roten Ende des Spektrums bis zur Wellenlänge 4000 mit einem stark dispergierenden Prisma mit konstanter Ablenkung von 90° ausgeführt. Resultate wurden bis jetzt erzielt mit Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Leuchtgas, Kohlensäure, Kohlenwasserstoffen, Jod, Schwefel, Selen, Tellur, Phosphor, Quecksilber, Zink und Kadmium.

Bevor wir auf die spektroskopischen Ergebnisse eingehen, lassen wir einige allgemeine Beobachtungen folgen.

Bei der Evakuation tritt in Luft zuerst ein lichtschwacher rötlicher Ring auf, der bei einem bestimmten Druck in einen fast weißen viel helleren Ring umschlägt. Bei weiterer Verdünnung wird der Ring diffuser und erfüllt schließlich die ganze Röhre, bis zuletzt bei zu hoher Evakuation die Entladung nicht mehr zustande kommt.

In Luft und einigen andern Gasen beteiligt sich der von der Quecksilberpumpe stammende Quecksilberdampf in unangenehmer Weise an dem Phänomen, indem nach einigem Stromdurchgang das Spektrum nur aus Quecksilberlinien besteht. Dies Vorherrschen von Queck-

1) W. Hittorf, Wied. Ann. **21**, 157, 1884 und J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **32**, 450, 1891.

2) R. Wachsmuth u. B. Winaver, Ann. d. Phys. **42**, 585, 1913.

silber ist von allen Beobachtern[1]) als lästig empfunden worden und Quecksilberabsorptionsmittel oder tiefe Temperaturen halfen nur ganz ungenügend, wovon wir uns auch überzeugt haben.

Wir haben nun aber feststellen können, daß in Gegenwart von Phosphorpentoxyd das Quecksilber spektroskopisch fast vollkommen verschwindet, jedenfalls soweit geschwächt wird, daß es nur noch mit seinen stärksten Linien schwach auftritt. In einigen Fällen war es vollkommen ausgelöscht, so daß es die spektroskopische Untersuchung der Füllung nicht hinderte.

Aus einer Reihe von Experimenten glauben wir schließen zu dürfen, daß die geringe Menge des vorhandenen Quecksilberdampfes nur dann die Leitung übernimmt, wenn zugleich Wasserstoff, entweder als solcher oder von Wasserdampf oder Kohlenwasserstoffen stammend zugegen ist. Entfernt man also den Wasserdampf durch starkes Trocknen, so beteiligt sich Quecksilber nicht an der Leitung. Das Phosphorpentoxyd braucht nicht in der Entladungsröhre zu sein, es genügt, daß das Gas einige Zeit damit in Berührung gewesen ist. So zeigen z. B. zwei durch eine kurze Röhre verbundene Kugeln, von denen eine mit Phosphorpentoxyd gefüllt ist und die andere nicht, die Erscheinung, daß frisch eingefüllte Luft in der mit P_2O_5 beschickten Röhre keine Quecksilberlinien, während die andere intensiv Hg aufweist. Nach einiger Zeit erlischt aber auch in der zweiten Röhre das Quecksilber und beide Ringentladungen sehen wieder gleich aus (Stickstoffspektrum).

In Zusammenhang mit diesem sonderbaren Verhalten mag folgende Erscheinung stehen. Evakuiert man eine Luftröhre bis zu dem Druck, wo die rote Entladung in die weiße umschlägt, und stellt dann die Pumpe ab, so evakuiert sich die Röhre beim Durchgang des Stromes von selbst in kurzer Zeit so weit, daß keine Entladung mehr durchgeht. Wiederholt man aber den Versuch, indem man einen zwischen Pumpe und Röhre liegenden Hahn nach Unterbrechen der Pumpe schließt, so findet die Selbstevakuation nicht oder sehr viel langsamer statt. Vermuthlich spielt auch hier der Quecksilberdampf eine Rolle. Als Verunreinigungen treten neben Quecksilber die Spektren von Wasserstoff und diejenigen Bandenspektren, welche in Gegenwart von Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff auftreten. Siegellack und Hahnfett muß also, will man ganz reine Verhältnisse haben, nach Möglichkeit vermieden werden. Die Messungen des Druckes haben wir nicht durchgeführt, wir haben nur die Druckverhältnisse stets so gewählt, wie es für die betreffende Erscheinung günstig war. Die Detailuntersuchung der Spektren ist noch nicht durchgeführt, hingegen lassen sich einige Ergebnisse kurz angeben.

Stickstoff: Die Erscheinungen sind der in Luft sehr ähnlich. Der schwache rote Ring bei relativ hohem Druck zeigt die erste und zweite Deslandressche Gruppe der Stickstoffbanden. Die photographische Aufnahme enthält trotz längerer Exposition nur die Kanten der blauen Banden. Der weiße Ring des mit glühendem Kupfer und Kalilauge gut gereinigten Stickstoffes gibt das reine Stickstoffbandenspektrum. Im ungereinigten Stickstoff, ebenso wie in Luft treten Kohlenoxydbanden und Swanspektrum als Verunreinigungen auf und verdrängen manchmal das Stickstoffspektrum vollkommen.

Interessant ist, daß Stickstoff selbst als Verunreinigung bei Metalldämpfen als Linienspektrum auftritt, so z. B. bei Quecksilber und Kadmium.

Im Sauerstoff tritt ein Bandenspektrum auf, das sich je nach Druck, Temperatur und Entladung verändert. Quecksilber ist nur mit der roten und einer orange Linie schwach vertreten. Die Füllung verschwindet nicht durch die Entladung. Das Sauerstoffspektrum ist bei Luftfüllung nicht vorhanden.

Wasserstoff in Gegenwart von Phosphorpentoxyd gibt das Serienspektrum, doch ist daneben Quecksilber stark vorhanden. Wird kein neuer Wasserstoff eingefüllt, so ist nach ganz kurzer Zeit nur Quecksilber vorhanden und dann erlischt die Röhre. Der Wasserstoff wird in irgendeiner Weise aufgezehrt.

Kohlensäure leuchtet in einem grauweißen hellen Ring, der sich mit der Verdünnung weiter ausbreitet. Selbstevakuation fehlt. Das Spektrum zeigt Änderungen mit dem Druck, die noch nicht weiter untersucht sind. Das Spektrum ist das des Kohlenoxyds ohne Linienverunreinigung.

Das Leuchtgas wird in der Ringentladung rasch verzehrt wie Wasserstoff und um das Spektrum photographieren zu können, mußten wir durch eine enge Kapillare dauernd Leuchtgas einströmen lassen, wobei der Druck durch die Pumpe reguliert wurde. Andernfalls verschwand das Leuchtgasspektrum zugunsten des Quecksilbers und bald war der Druck der Röhre zu niedrig, als daß eine Entladung durchging. Auch hier sind trotz Gegenwart von Phosphorpentoxyd immer Quecksilberlinien da. Wie schon oben erwähnt, übernimmt immer in Gegenwart von Wasserstoff die kleinste Menge Quecksilberdampf die Leitung. Die photographische

1) J. v. Kowalski, C. R. **158**, 625, 1914; R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. **39**, 611, 1912.

Aufnahme des Leuchtgases zeigt das Spektrum der Kohlenwasserstoffe (Swanbanden) neben dem Linienspektrum des Quecksilbers und des Wasserstoffs.

Das Phosphorlinienspektrum erhielten wir in einer langen Röhre mit weißem Phosphor selbst ohne Erwärmen. In einer Glaskugel stört der Beschlag der Wandung mit rotem Phosphor, der sich reichlich bildet. In der langen Röhre konnte das vordere Ende durch leichtes Erwärmen durchsichtig erhalten werden. Die Entladung ist glänzend weiß.

Selen muß in einer Quarzröhre ziemlich stark erhitzt werden und gibt intensiv das Linienspektrum.

Bei Schwefel ist nur geringe Erwärmung notwendig. Der grüne Ring ist so intensiv, daß es uns gelungen ist den blauen Teil des Spektrums mit einem Konkavgitter von 3 m aufzunehmen. Je nach der Erregung erhielten wir das Linienspektrum rein oder daneben noch die Banden. Um letztere mit dem Gitter zu erhalten, war allerdings eine Expositionszeit von $7^1/_2$ Stunden notwendig.

In einer Quarzröhre ist auch das Tellurlinienspektrum ohne Schwierigkeit durch Erwärmen von Tellur aufzunehmen. Das Spektrum ist sehr linienreich, es enthält auch mehrere Banden.

Bis jetzt war fast einzig das Quecksilber[1]) eingehender untersucht. Es zeigt eine große Mannigfaltigkeit, je nach den Bedingungen. Linienspektrum und Bandenspektrum sind erhältlich, wenn auch letzteres nicht allein. Wir haben durch spektrale Aufnahme festgestellt, daß bei intermittierender oder dauernder Erregung die beiden Linienspektren nicht nur Intensitätsunterschiede, sondern zum Teil ganz verschiedene Linien aufweisen. Vielleicht ist die Temperatur dafür verantwortlich zu machen, indem bei dauernder Erregung sich die Röhre ziemlich erwärmt. Bei großer Energie und passendem Druck wird das Spektrum sehr linienreich.

In einem bestimmten kleinen Druckintervall beobachteten wir ein Nachleuchten[2]) (Phosphoreszenz) des Quecksilberdampfes mit Banden im Grün.

Kadmium muß im Quarzrohr ziemlich stark erhitzt werden und gibt dann ebenfalls ein Linienspektrum mit vielen Linien.

Wie beim Quecksilber ist auch hier das Spektrum viel linienreicher, wie das des kondensierten Funkens in Luft. Zu Beginn der Erregung (niederer Dampfdruck) beobachtet man Banden im Rot und Grün, die nachher vollständig verschwinden.

Zink verhält sich wie Kadmium mit einem sehr linienreichen Spektrum. Soweit es die Beurteilung bei kleiner Dispersion zuläßt, liegen im Violett Banden, doch kann das erst durch eine Aufnahme mit dem Konkavgitter entschieden werden.

Quecksilber, Zink und Kadmium lassen sich bei zu hohem Dampfdruck nicht erregen. Die vielen Variationen der Spektren, welche mit der Änderung der Versuchsbedingungen eintreten, bedürfen eines eingehenden Studiums.

Jod läßt sich sowohl in der kugeligen, wie auch in der langen Röhre erregen, doch bildet sich die Ringentladung wahrscheinlich wegen zu hohen Dampfdruckes in Gegenwart von festem Jod bei Zimmertemperatur nicht schön aus. Die Spektralaufnahme enthält neben einigen Linien einen kontinuierlichen Grund im Blau und Violett, der teilweise in Banden aufgelöst ist. Als spektrale Verunreinigungen finden sich neben Quecksilber Kohlenwasserstoffe und Kohlenoxyd vom Hahnfett herrührend.

Natrium in einer Glaskugel erwärmt, zeigt nur in unmittelbarer Nähe des Metalls die *D*-Linien, während die eigentliche Ringentladung in Quecksilber, Stickstoff oder Kohlenwasserstoff erfolgte.

Wird eine Luftröhre bei optimaler Intensität (weißer Ring) betrieben, so beobachtet man nach Unterbrechung ein intensives Nachleuchten des ganzen Röhreninhaltes in schmutziggelblichem Lichte mit einem Stich ins Grüne. Solange die rote Ringentladung vorhanden ist, fehlt das Nachleuchten vollkommen. Je nach den Druckbedingungen ist Intensität und Dauer der Phosphoreszenz verschieden. Bei fortschreitender Evakuation tritt die Erscheinung plötzlich ein, um rasch maximale Intensität zu gewinnen. Bei weiterem Pumpen nimmt die Stärke langsam ab, um bei einem bestimmten Druck gänzlich aufzuhören. Die Erscheinung tritt in Luft und in Stickstoff auf. In letzterem mit etwas größerer Intensität. Mit der Dauer der Erregung (Funkenzahl) nimmt bei sonst unveränderten Bedingungen die Phosphoreszenz zu, doch hat sie schon nach wenigen Funken (etwa 3) ihr Maximum erreicht, so daß bei weiterer Funkenzahl das Nachleuchten nicht mehr zunimmt.

Die spektroskopische Untersuchung der Ringentladung, wenn das Nachleuchten eintrat, zeigte außer der grünen Quecksilberlinie nur das Stickstoffbandenspektrum. Das Spektrum der Phosphoreszenz weist sechs diffuse Banden

1) J. von Kowalski, C. R. 158, 788, 1914 und diese Zeitschr. 15, 249, 1914.

2) St. London und H. Piwnikiewicz, diese Zeitschr. 14, 381, 1913, beobachteten unter dem Einfluß der Röntgenstrahlen kontinuierliches Lumineszenzspektrum.

auf, von denen die drei stärkeren langwelligen mit einem Handspektroskop gemessen folgende Wellenlängen ergaben

625, 565—575, 495 $\mu\mu$.

Die nächste Bande liegt noch im Grün, zwei weitere sehr lichtschwache sind im Blau.

Eine photographische Aufnahme ist bis jetzt nicht geglückt wegen zu geringer Empfindlichkeit unserer Platten im Rot und Grün. Bei diesen Versuchen wurde der primäre Strom mit einem Metronomen unterbrochen, der während des Stromschlusses den Spalt verschloß.

Das Spektrum des Nachleuchtens ist bei Luft und Stickstoff identisch. Dies steht im Widerspruch mit den Behauptungen von Strutt[1]), nach denen das Nachglühen der Luft kontinuierlich ist, das des (aktiven) Stickstoffs aus drei Banden (Rot, Gelb und Grün) bestehen soll. Zwei Prozent Sauerstoff sollen genügen, um die Phosphoreszenz des Stickstoffs zum Verschwinden zu bringen.

Durch diese vorläufige Mitteilung hoffen wir gezeigt zu haben, in welchen Richtungen die elektrodenlose Ringentladung verdient spektroskopisch studiert zu werden.

1) R. J. Strutt, diese Zeitschr. **15**, 274, 1914.

Basel, September 1917.

(Eingegangen 22. September 1917.)

Über die Röntgenspektren der isotopischen Elemente.

Von Manne Siegbahn und W. Stenström.

Mit Tafel XIV.

Durch die Untersuchungen von Rutherford und Andrade wissen wir, daß die γ-Strahlenspektren von *RaB* und *RaC* eine wesentliche Übereinstimmung[1]) mit den gewöhnlichen Röntgenspektren ihrer Isotopen zeigen. Wie weitgehend diese Übereinstimmung in betreff der numerischen Werte der Wellenlängen ist, läßt sich aus den unter verschiedenen Bedingungen ausgeführten Messungen nicht gut beurteilen, nur scheint es, als ob ein Unterschied, wenn er vorhanden wäre, innerhalb der Grenzen der damals erreichten Genauigkeit lag.

Leichter als ein Vergleich der γ-Strahlenspektren der radioaktiven Stoffe mit den Röntgenspektren ihrer Isotope ist eine ähnliche Untersuchung der Röntgenspektren verschiedener Isotope. Am nächsten sind für eine solche Untersuchung die zwei Isotopen Blei-*RaG* heranzuziehen, da *RaG* einerseits in genügender Reinheit und Menge vorliegt und andererseits ihr Atomgewicht gut bestimmt ist. Bekanntlich ist es O. Hoenigschmid gelungen, unter Verwendung von reinem, kristallisiertem Uranerz von Morogoro in Deutsch-Ostafrika ein *RaG*-Präparat von besonderer Reinheit darzustellen. Dank des freundlichen Entgegenkommens des Herrn Prof. Hoenigschmid waren die Verfasser imstande, das Röntgenspektrum eines solchen Präparates von *RaG* (sein Atomgewicht war nach den Bestimmungen von Hoenigschmid 206,05, während gewöhnliches Blei ein Atomgewicht 207,18 besitzt) mit dem des gewöhnlichen Bleies zu vergleichen.

Diese Untersuchung bezog sich teils auf die ganze *L*-Reihe teils auch auf die kräftigsten Linien (α und β) der *M*-Reihe. In jedem Falle wurden die zwei Spektren unter ganz identischen Bedingungen auf eine und dieselbe Platte aufgenommen (Tafel XIV, Fig. 1). Durch Bleiblenden im Strahlenwege wurde dafür gesorgt, daß ein mittlerer Streifen an der Platte mit dem Röntgenspektrum des *RaG* beleuchtet wurde, während anschließend daran an dem äußeren Teil der Platte das Bleispektrum photographiert wurde. In keinem Falle konnte eine Verschiebung oder sonstige Änderung der Spektrallinien gefunden werden.

Die Anordnungen zur Erzeugung der *L*-Reihen der Röntgenspektren waren die früher beschriebenen[1]). Bei der *M*-Reihe wurde ein neukonstruiertes Rohr verwandt, dessen Aussehen aus Fig. 2 zu ersehen ist. Die Elektronen wurden von einer Wehneltkathode erzeugt, nachdem

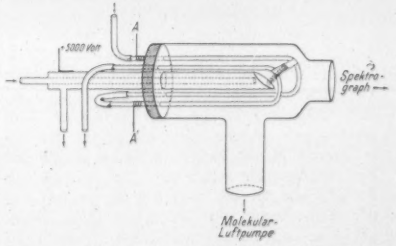

Fig. 2. Versuchsrohr zur Aufnahme der *M*-Reihe.

das Vakuum hinreichend hoch getrieben war, um ein Durchschlagen des Rohres mit 5000 Volt (ohne Heizung der Kathode) zu verhindern. Um das Rohr für Dauerbetrieb geeignet zu machen, waren sowohl Kathodenzuleitungen wie Antikathode mit strömendem Wasser gekühlt. Zum

1) M. Siegbahn, Bericht über die Röntgenspektren usw. Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 296, 1916.

1) Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 329, 1916.

Heizen der Platinblechkathode dienten einige Akkumulatoren, deren einer Pol geerdet war. Die Spannung zur Antikathode (etwa 5000 Volt) wurde mit Hilfe von einem Einankerumformer, Transformator und Gleichrichter (an die Achse des Umformers montiert) erzeugt. Bei den langen Wellen der M-Reihe können die Expositionszeiten bei Verwendung eines solchen Rohres gegenüber den gewöhnlichen (nicht gasfreien) Röhren erheblich verkürzt werden. Bei den verhältnismäßig kleinen Spannungen ist das nötige Vakuum auch leicht zu erreichen. Als Nachteil ist das verhältnismäßig schnelle Verdampfen der Oxydschicht an der Antikathode zu verzeichnen. Ein Gesamtbild der ganzen Anordnung ist in Fig. 3, Tafel XIV zu sehen.

Als Endresultat ergibt sich somit, daß die Wellenlängen der Röntgenspektren der Isotopen Blei-*RaG* mit der erreichten Genauigkeit von etwa $0{,}0005 \cdot 10^{-8}$ cm miteinander übereinstimmen. Früher ist bekanntlich gefunden, daß die gewöhnlichen, sichtbaren und ultravioletten Spektren auch identisch sind, so daß bisher bei den Atomschwingungen die durch die verschiedene Masse des Atomkernes bedingte Verschiedenheit unseren Messungen sich entzieht, wie man auch aus theoretischen Betrachtungen zu glauben geneigt war.

Lund, Physikalisches Institut, 29. August 1917.

(Eingegangen 4. September 1917.)

Grundlegung der Kinematik einer physikalischen Welle von elementarer Schwingungsform. III [1].

Von Karl Uller.

Jede Theorie eines Komplexes von physikalischen Erscheinungen, die sich in Raum und Zeit abspielen, schlägt sich nieder in Feldgleichungen, welche die Änderungen der betreffenden physikalischen Größen in Raum und Zeit miteinander verbinden. Das System der Feldgleichungen gibt stets den allgemeinen Fall der Entstehung von Wellen in ihren Quellgebieten und der gegenseitigen Durchkreuzung dieser Wellen in Gebieten, die für sie quellenfrei sind. Wesentlich an dieser Aussage ist die Einsicht, daß die Welle, einmal entstanden, ein besonderes Gebilde ist, ein Individuum, das nicht durch seinesgleichen aufgehoben oder zerlegt werden kann, wie etwa ein statisches Feld. Deshalb liegen allemal zwei Hauptaufgaben vor: Die Darstellung der Wellenentstehung und die des Wellendaseins. Befassen wir uns zunächst mit der praktisch wichtigeren, der letzteren. Wir haben also dann die Aufgabe, aus den gegebenen Feldgleichungen für quellenfreien Raum das Gleichungssystem der Welle hervorgehen zu lassen. Bisher konnte man diese Aufgabe nicht sehen, weil man die Wesensverschiedenheit zwischen stationären und nichtstationären Störungen ein und derselben Quelle nicht erkannt hatte. Jeder nichtstationäre Vorgang ist ein Ausbreitungsvorgang, der seinen Ursprung in einem bestimmten Quellgebiet hat, ist etwas Besonderes, das wir Welle benennen. Ihrer Eigenart entspricht es, daß es eine ihr eigentümliche Kinematik gibt, deren oberster Satz das Interferenzprinzip ist. Dies besagt, daß Wellen sich nicht zu einer Welle überlagern lassen, womit umgekehrt auch geleugnet wird, daß eine Welle sich in Wellen zerlegen läßt. Wohl gibt es nichtstationäre Felder, die sich überlagern lassen zu einem resultierenden Feld. Wohl sind dann die nichtstationären Störungen aus verschiedenen Quellen solche Teilfelder. Aber das resultierende Feld ist dann nicht die Störung einer fiktiven Quelle, welche die reellen Quellen hinsichtlich der auslaufenden Störungen ersetzen könnte. Welle ist eben noch etwas anderes als ein nichtstationäres Feld, oder was dasselbe besagt, als eine nichtstationäre Störung. Welle ist das nichtstationäre Feld eines bestimmten Quellgebietes. Lassen sich die verschiedenen Felder der verschiedenen Quellen überlagern, so bekommt man zwar ein resultierendes Feld, aber nicht eine resultierende Welle, sondern einen Wellenzustand, d. h. eine Durchkreuzung, eine Interferenz der verschiedenen Wellen. Damit steht nicht in Widerspruch, daß eine Welle rechnerisch in Wellenkomponenten zerlegt gedacht werden darf. Es ist nämlich der isolierte Sonderfall möglich, daß zwei Wellen genau gleiche zeitliche Abhängigkeit und genau gleiche Wellennormalenpaare zeigen, gleich nach Richtung und Größe. Dann aber sind sie durch nichts voneinander zu unterscheiden. Man tut gut, bei wellentheoretischen Betrachtungen stets Wellen von Überlagerungsunfähigkeit ins Auge zu fassen, wie es die hydrodynamischen sind. Der Wesenskern der Welle liegt kurz gefaßt in dem Satze, daß Wellennormalenpaare niemals zusammengelegt oder zerlegt werden können.

Der kinematische Ausdruck des Interferenzprinzips ist nun für Wellen von elementarer Schwingungsform gefunden; im § 5 dieser Grundlegung steht er. Es gilt, ihn in allen Beziehungen, die ein Feld zu erfüllen hat, zur Herrschaft zu bringen. Erst diejenige Gesamtheit von Gleichungen, in denen das Interferenz-

1) II: Diese Zeitschrift 17, 610, 1916.

prinzip wirklich und völlig ausgedrückt ist, bildet das gesuchte Gleichungssystem der betreffenden Welle von elementarer Schwingungsform. In § 5 ist auch schon derjenige Teil dieser Aufgabe erledigt, der die Bedingungen für das Feld des Wellennormalenpaares herauszuschälen hat. Jetzt wollen wir noch die stehengebliebene Restgleichung (13″) für elektromagnetische Wellen auflösen und zum Schluß die Analyse einer Skalarwelle anfügen, wie es die Temperaturwelle ist.

§ 6. Das Gleichungssystem der elektromagnetischen Welle in gewöhnlichen isotropen Körpern. Wir schicken einen vektoranalytischen Satz voraus. In demselben Raume seien zwei Vektorfelder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$. Der letztere sei wirbelfrei, also

$$\operatorname{rot}\mathfrak{w} = 0. \tag{1}$$

Ferner seien überall beide Felder orthogonal orientiert, also überall

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{w}) = 0, \tag{2}$$

weshalb auch

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{m}\mathfrak{w}) = 0 = (\mathfrak{m}\nabla)\mathfrak{w} + (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + [\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}] \tag{3}$$

ist. Stellen wir jetzt die Forderung auf, daß die Intensitätsverteilung des $\mathfrak{m}$-Feldes mit dem $\mathfrak{w}$-Felde keine Beziehungen eingehe. Zerlegen wir also $\mathfrak{m}$ nach Richtung $\mathfrak{l}$ und Betrag χ, so sollen nach unserer Forderung keine Beziehungen zwischen $\mathfrak{w}$ und χ sowie seinen Ableitungen auftreten. Die Gl. (2) genügt ihr, dagegen nicht ohne weiteres Gl. (3). Multiplizieren wir sie skalar mit $2\mathfrak{w}$, so kommt

$$2(\mathfrak{w}(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}) = -(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\mathfrak{w}^2), \tag{4}$$

was ebenfalls unsere Forderung wegen (2) befriedigt, da

$$(\mathfrak{w}\nabla)\chi\mathfrak{l} = \chi(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{l} + (\mathfrak{w}\operatorname{grad}\chi)\mathfrak{l}$$

ist. Gleicherweise befriedigt ist Gl. (3) in der Komponente bezüglich der Richtung von $\mathfrak{m}$, nämlich in

$$(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\mathfrak{m}^2) - 2([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = -2(\mathfrak{m}(\mathfrak{m}\ )\mathfrak{w}). \tag{5}$$

Multiplizieren wir dagegen Gl. (3) skalar mit $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$, so kommt

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}) = -(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, (\mathfrak{m}\ )\mathfrak{w}). \tag{6}$$

Die Projektion von $(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m}$ auf die Richtung von $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ muß also frei sein von $\operatorname{grad}\chi$, da es die von $(\mathfrak{m}\ )\mathfrak{w}$ ist. Weil nun über $(\mathfrak{w}\operatorname{grad}\chi)$ keine Vorschriften bestehen sollen, muß $(\mathfrak{l}\operatorname{rot}\mathfrak{m})$ verschwinden, also

$$(\mathfrak{m}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0 \tag{7}$$

sein.

Unsere Forderung legt also wegen (1) und (2) dem $\mathfrak{m}$-Felde die Beschränkung auf, daß es flächennormal sei.

Dieser Satz gilt auch für komplexe Felder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$, da wir über $\operatorname{grad}\mathfrak{l}^2$ uns nicht zu äußern brauchen. Die Voraussetzungen fallen mit denen unseres physikalischen Problems zusammen und die Forderung ist identisch mit der des Interferenzprinzips. Infolgedessen ist das Ergebnis (7) auch für unsere Welle bindend.

Multiplizieren wir nun die erwähnte Restgleichung (13″) in § 5, nämlich

$$\left.\begin{aligned} i\,2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} + [\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{grad}\log a_r] \\ + i\,(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\mathfrak{m},\ 2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w}) \\ = i\,(\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Schreiben wir wie in § 5 $\mathfrak{m} = \omega\cdot\mathfrak{l}$, worin der komplexe Einheitsvektor $\mathfrak{l}$ die Richtung von $\mathfrak{m}$ wiedergibt, so ist nach dem vorangegangenen die Komponente von

$$2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a)\mathfrak{w}$$

frei von $\operatorname{grad}\omega$, nämlich proportional ω, also muß das nach (9) auch für die entsprechende Komponente von $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ gelten. Das ist aber unmöglich zu erzielen, deshalb muß sein

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{m}\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0, \tag{10}$$

was übrigens aus (7), (2) und (1) keineswegs gefolgert werden kann. Der Verlauf der $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$-Linien soll also nach (10) unbeeinflußt sein von der Verteilung ihrer Beträge. Wegen (2) und (7) ist $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ von der Form

$$\operatorname{rot}\mathfrak{m} = \varrho\mathfrak{w} + \sigma[\mathfrak{m}\mathfrak{w}], \tag{11}$$

wo

$$\varrho = \frac{(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m})}{\mathfrak{w}^2}$$

und

$$\sigma = \frac{([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\operatorname{rot}\mathfrak{m})}{\mathfrak{m}^2\mathfrak{w}^2}$$

noch unbestimmte Funktionen sind, die in

$$\operatorname{div}\varrho\mathfrak{w} + \operatorname{div}\sigma[\mathfrak{m}\mathfrak{w}] = 0 \tag{12}$$

noch zusammenhängen. Aus (11) entwickeln wir mit Hilfe von (3)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m} = [\operatorname{grad}\varrho, \mathfrak{w}] + \sigma\{2(\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{m} \\ + [\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}] + \mathfrak{m}\operatorname{div}\mathfrak{w} - \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{m}\} \\ + [\operatorname{grad}\sigma, [\mathfrak{m}\mathfrak{w}]], \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

so daß mit Rücksicht auf (9)

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\mathfrak{m}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = (\operatorname{grad}\varrho\,[\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}]) \\ -(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m})\{\sigma\operatorname{div}\mathfrak{m} + \sigma(\mathfrak{m}\operatorname{grad}\log a) \\ + (\mathfrak{m}\operatorname{grad}\sigma)\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wird. In diesem Ausdruck, in welchem die Bedingungen (1) und (2) verwertet sind, soll nun nach (10) der Betrag von $\operatorname{rot}\mathfrak{m}$ keine Rolle spielen. Das ist nur möglich, wenn $(\mathfrak{w}\operatorname{rot}\mathfrak{m}) = \varrho$ überall verschwindet. Wir haben daher

$$(\mathfrak{w}, \operatorname{rot}\mathfrak{m}) = 0 = \operatorname{div}[\mathfrak{m}\mathfrak{w}]; \tag{15}$$

für σ besteht nach (12) die Vorschrift

$$([\mathfrak{m}\mathfrak{w}]\,\mathrm{grad}\,\sigma) = 0. \qquad (16)$$

Nach (9) und (3) ist nun auch

$$(\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,(\mathfrak{w}\dot{F})\,\mathfrak{m}) = 0 = (\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,(\mathfrak{m}F)\,\mathfrak{w}). \qquad (17)$$

Es liegen also $(\mathfrak{w}F)\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{m}F)\mathfrak{w}$ und rot rot $\mathfrak{m}$ alle miteinander in der von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{w}$ bestimmten Ebene.

Damit sind jetzt alle Bedingungen gefunden, die auch in der Restgleichung (8) das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ unberührt lassen vom Betrage des magnetischen Wellenvektors $\mathfrak{m}$.

Der besseren Übersicht halber stellen wir das gesuchte Gleichungssystem der magnetischen Welle zusammen. Es ist

$$(\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m) = 0, \qquad (18)$$

$$(\mathfrak{m}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (19)$$

$$(\mathfrak{w}_m\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (20)$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m}) = 0, \qquad (21)$$

$$\mathrm{div}\,a_m\mathfrak{m} = 0, \qquad (22)$$

$$\mathfrak{w}_m^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}_m - i\,(\mathfrak{w}_m\,\mathrm{grad}\log a_e) - a = 0, \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &i\,2\,(\mathfrak{w}_m F)\,\mathfrak{m} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{m} + [\mathrm{rot}\,\mathfrak{m},\,\mathrm{grad}\log a_e]\\ &\quad + i\,(\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\log a)\,\mathfrak{w}_m = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Da wir nach (7) und (15)

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{m} = i(\chi - 1)\,[\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m]$$

setzen können, worin χ ein noch zu bestimmender Skalar ist, erhalten wir für das elektrische Feld in Abhängigkeit von dem magnetischen nach Gl. (16) im § 5

$$a_e E = \chi\,[\mathfrak{m}\mathfrak{w}_m]\,e^{i\Phi_m}, \qquad (25)$$

und für die Strahlung[1])

$$\mathfrak{R} = \frac{V}{4}\cdot e^{-2(\nu''t + \Phi''_m)}\,\chi\chi^*\left\{(\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*)\left(\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} + \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*}\right) - \left[\frac{\mathfrak{w}_m}{a_e} - \frac{\mathfrak{w}_m^*}{a_e^*},\ [\mathfrak{m}\mathfrak{m}^*]\right]\right\}. \qquad (26)$$

Diese Ausdrücke gelten für jede Welle, die durch einen gewöhnlichen isotropen Körper läuft, insbesondere für jede ausgesprochene Beugungswelle sowie für jede durch einen stetig-inhomogenen Körper sich krümmende Welle.

Für den Bau der elektrischen Welle gelten natürlich Gleichungen, die denen der magnetischen vollkommen entsprechen.

Wie sich das Gleichungssystem für die elastische Scherungswelle gestaltet, ist nach diesen Ausführungen unschwer zu entwickeln.

§ 7. Das Gleichungssystem der Temperaturwelle in gewöhnlichen isotropen und festen Körpern. Solange in keinem Punkt eine Energieumsetzung statthat, beherrscht das Temperaturfeld Θ die Beziehung

$$c\mu\dot{\Theta} = \mathrm{div}\,\{\lambda\,\mathrm{grad}\,\Theta\} \qquad (1)$$

ohne sonstige Nebenbedingungen. Darin bedeutet μ die Massendichte, c die Wärmekapazität und λ das Wärmeleitvermögen. Für eine Temperaturwelle von elementarer Schwingungsform

$$\Theta = \Theta_0 + {}^1/_2\{\vartheta\cdot e^{i(\nu t + \Phi)} + \vartheta^*\cdot e^{-i(\nu^* t + \Phi^*)}\}, \qquad (2)$$

worin Θ_0 eine Konstante ist, nimmt Gl. (1) die Form an

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta\,\{\mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\,(\mathfrak{w},\,\mathrm{grad}\log\lambda) - a\}\\ &\quad - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vartheta + i\,2\,(\mathfrak{w},\,\mathrm{grad}\,\vartheta)\\ &\quad - (\mathrm{grad}\,\vartheta,\,\mathrm{grad}\log\lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Der Wellenparameter $a = -i\nu c\mu/\lambda$ hat den gleichen Bau wie der für die Flüssigkeitsscherungswelle[1]).

Das Interferenzprinzip verlangt nun in der hinsichtlich ϑ und Φ zunächst noch willkürlichen Zusammensetzung der Wellengleichung (3), daß, welchen Wert man auch dem Skalar ϑ beilege, Φ und somit $-\mathrm{grad}\,\Phi = \mathfrak{w}$ davon ganz unberührt bleibe. Infolgedessen muß sein

$$\mathfrak{w}^2 + i\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} + i\,(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\log\lambda) - a = 0. \qquad (4)$$

Auch die Restgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vartheta - i\,2\,(\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\,\vartheta)\\ &\quad + (\mathrm{grad}\,\vartheta\,\mathrm{grad}\log\lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

hat dieser Forderung zu genügen, was $\mathrm{grad}\,\vartheta = 0$, also

$$\vartheta = \mathrm{const} \qquad (6)$$

nach sich zieht. Nun erst ist zum Ausdruck gebracht, daß Temperaturwellen sich weder vereinigen noch zerlegen lassen. Und nun ist ϑ der Wellenskalar und $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar. Wir sehen, daß die Intensitätsverteilung der Temperatur ganz vom Felde des Wellennormalenpaares geregelt wird.

Diffusionswellen befolgen die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Für Skalarwellen, in denen neben $\alpha\dot{\Theta}$ noch Glieder von der Form $\beta\ddot{\Theta} + \gamma\dddot{\Theta} + \cdots$ auftreten, würde das Interferenzprinzip dieselben Bedingungen wie (4) und (6) fordern; nur der Wellenparameter a würde sich anders zusammensetzen.

1) K. Uller, Die Strahlung in einer Welle von elementarer Schwingungsform (diese Zeitschr. 17, 369, 1916).

1) K. Uller, Wellen von elementarer Schwingungsform in Flüssigkeiten und Gasen (diese Zeitschr. 17, 303, 1916).

Gießen, im Juli 1917.

(Eingegangen 14. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie[1].

Von Gustav Mie.

I.

Die Aufgabe meiner Vorträge soll sein, einige Probleme und Fragen zu erörtern, die sich der Theorie der Materie, soviel ich sehen kann, zurzeit als die nächstliegenden darbieten. Die Theorie der Materie ist auf das engste verknüpft mit der Theorie der Gravitation; denn wahrscheinlich sind Gravitation und Elektromagnetismus die beiden Urphänomene, die der ganzen Erscheinungswelt zugrunde liegen. Während nun die Gesetze der elektrischen und magnetischen Erscheinungen experimentell eingehend erforscht werden konnten, und die Theorie des Elektromagnetismus ganz auf der experimentellen Erfahrung aufgebaut ist, bietet die Gravitation der Experimentierkunst unüberwindliche Schwierigkeiten, weil man weder Gravitationsfelder von genügender Stärke künstlich im Laboratorium herstellen, noch das vorhandene Feld der Erde willkürlich verändern kann. Dadurch ist die Theorie gezwungen worden, den Weg der reinen Spekulation zu beschreiten, wobei als Führung die in dem Newtonschen Gravitationsgesetz enthaltenen Erfahrungstatsachen dienen müssen, vor allem die Tatsache, daß schwere Masse und träge Masse miteinander proportional sind. Diese Tatsache allein kann uns nicht sehr weit bringen, dazu ist ihr Inhalt doch zu dürftig; man muß zur Spekulation übergehen, einer Forschungsmethode, die in der Physik ziemlich neu und ungewohnt ist. Man geht so vor, daß man Prinzipien ersinnt, die gleichzeitig von großer Allgemeinheit und von großer Fruchtbarkeit sind, und aus denen sich vor allem die experimentell ermittelten Gesetze zwanglos als Konsequenzen herleiten lassen. Solche Prinzipien kennen wir längst in der Geometrie, die ja im Grunde genommen auch nur ein Teil der theoretischen Physik ist, als die sogenannten Axiome, und Hilbert nennt deswegen sehr bezeichnend den hier geschilderten Forschungsweg „die axiomatische Methode". Ein Beispiel für ein Axiom der neueren Physik ist das Hamiltonsche Prinzip, dessen allgemeine Bedeutung zuerst Helmholtz[2] dargelegt hat, und das auch in meinen Versuchen, eine Theorie der Materie zu finden, eines der Fundamente bildet. Ein anderes Prinzip ist das von der Relativität der Bewegungen, welches H. A. Lorentz und A. Einstein aufgestellt haben. Dieses Prinzip ist, wie Minkowski gezeigt hat, tatsächlich nichts anderes als ein rein geometrisches Axiom, das sich nur dadurch von den alten euklidischen Axiomen unterscheidet, daß es von dem vierdimensionalen Gebiet Raum-Zeit etwas aussagt. Neuerdings hat Einstein ein Prinzip aufgestellt, welches er das allgemeine Prinzip der Relativität nennt, und welches er als eine Erweiterung des Prinzips von der Relativität der Bewegungen, des von ihm sogenannten „speziellen" Relativitätsprinzips ansieht. Auf dieses außerordentlich fruchtbare Prinzip hat Einstein eine wundervolle Theorie der Gravitation aufgebaut, die von Hilbert in interessanter Weise beleuchtet worden ist, und die man wohl als die Lösung des Rätsels von der Gravitation anzusehen hat. Jedenfalls wird es sich in der nächsten Zeit hauptsächlich darum handeln, die beobachtbaren Konsequenzen dieser Theorie zu prüfen und alle Folgerungen dieser Theorie zu entwickeln. Die Theorie der Materie wird die Gravitation nun einfach in der von Einstein fertig dargebotenen Fassung aufnehmen müssen, und in der Tat hat Hilbert nachgewiesen, daß dies ohne weiteres möglich ist. Eine Frage bleibt jedoch noch zu erledigen, und ich glaube zeigen zu können, daß diese Frage gerade für die Theorie der Materie besonders wichtig ist, das ist die Frage nach der physikalischen Bedeutung des sogenannten allgemeinen Relativitätsprinzips. Ich will von vornherein sagen, daß ich hier zu einer anderen Ansicht komme als Einstein. Wir werden sehen, daß das Prinzip, welches der Einsteinschen Theorie zugrunde liegt, doch einen anderen Charakter hat als das ältere Axiom von der Relativität der Bewegungen, und daß die Form, in welcher Einstein es ausgesprochen hat, eine zu große Unbestimmtheit mit sich bringt, als zulässig. Die im folgenden von mir gegebene Fassung des neuen Axioms vermeidet diesen Fehler, zugleich eröffnet sie für die spekulative Methode, auf die wir in der Theorie der Materie angewiesen sind, einen neuen Ausblick.

Um den physikalischen Sinn des Einsteinschen Prinzips der allgemeinen Relativität klar zu machen, will ich mit einem Beispiel beginnen,

---

1) Dieser Aufsatz gibt im wesentlichen den Inhalt dreier vom 5.—8. Juni in Göttingen gehaltener Wolfskehlvorträge wieder. Zum Teil habe ich die Vorträge nachträglich wesentlich umgearbeitet und erweitert.

2) Aus einer Bemerkung von Herrn Felix Klein habe ich ersehen, daß kurz vor Helmholtz auch J. J. Thomson die allgemeine Bedeutung des Hamiltonschen Prinzips gezeigt hat.

das in Einsteins ersten Veröffentlichungen eine große Rolle spielt, dem geschlossenen Coupé, das beschleunigt durch den Weltraum fährt, und in welchem eine Anzahl Physiker beisammen sind mit allerlei feinen Meßinstrumenten, an denen sie Beobachtungen anstellen. Wenn das Coupé keine Fenster hat, durch welche die Beobachter hindurchsehen können, wird es ihnen dann möglich sein, die beschleunigte Bewegung zu konstatieren? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir unterscheiden, was für eine Kraftwirkung die Beschleunigung hervorruft. Denken wir uns zuerst einmal, daß eine ferne große schwere Masse das Coupé durch die Gravitationskraft in Beschleunigung setzt. Das Coupé könnte ein Planet sein, der nicht um die Sonne herumläuft, sondern kometenartig aus weiter Ferne direkt in radialer Richtung herbeieilt. Da die träge Masse eines jeden Stoffes seiner schweren Masse proportional ist, so heben sich in einem frei fallenden materiellen System in allen seinen Teilen Schwerkraft und Trägheitswiderstand gerade gegeneinander auf. Die Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé werden also weder von der Schwerewirkung der Sonne, zu der sie hinstürzen, noch von dem Trägheitswiderstand, der mit der beschleunigten Bewegung verbunden ist, etwas bemerken. Sie müßten also schon nach der Art des Michelsonschen Versuches sehen, ob sie an einem Lichtstrahl nicht den Einfluß der Beschleunigung konstatieren könnten. Und in der Tat, wenn die Materie weiter nichts zeigte, als die Lorentzsche Kontraktion, die mit wachsender Geschwindigkeit des Coupés natürlich immer mehr zunehmen muß, und wenn das Licht sich durch den Raum mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit geradlinig fortpflanzte, so müßte der Michelsonsche Versuch in dem Einsteinschen Coupé ein positives Resultat geben. Einstein hat nun untersucht, ob nicht doch Veränderungen in der Materie und im Äther vorhanden sein könnten, die auch in diesem Fall das zu erwartende positive Resultat des Michelsonschen Versuchs und aller ähnlichen Versuche gerade kompensierten. Das Resultat dieser außerordentlich schwierigen Untersuchungen, die sich über viele Jahre erstreckt haben, ist die jetzige Einsteinsche Gravitationstheorie. Ihr liegt die Annahme zugrunde, daß an allen Stellen, wo ein Gravitationspotential herrscht, welches von dem unendlich fern von allen gravitierenden Massen vorhandenen Nullwert verschieden ist, der Äther in all seinen Eigenschaften und Wirkungen durchgängig eine Modifikation erfährt. Das äußert sich in allen Kräften, auch den inneren Kraftwirkungen der Materie, die ja schließlich alle durch den Äther übertragen werden, und die Materie bekommt daher eigentümliche Deformationen, die aber ähnlich wie die Lorentzsche Kontraktion, für alle Körper genau gleich sind und daher von den Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé nicht beobachtet werden können, es ändern sich auch träge Masse und überhaupt alle physikalischen Eigenschaften der Materie in derselben unbemerkbaren Weise. Aber auch außerhalb der Materie im leeren Raum macht sich die Veränderung der physikalischen Beschaffenheit des Äthers bemerkbar: Die Lichtgeschwindigkeit ändert sich bei verändertem Gravitationspotential, ein Lichtstrahl, der quer zum Gravitationsfeld geht, wird abgelenkt, beschreibt also eine krumme Linie, in verschiedenen Richtungen ist die Lichtgeschwindigkeit verschieden, aber doch, ohne daß der Äther dabei doppeltbrechend würde. Diese eigentümlichen physikalischen Veränderungen des Äthers können nun, wie in der Einsteinschen Theorie bewiesen wird, gerade den Einfluß der beschleunigten Bewegung auf die Beobachtungen kompensieren und somit alle Bemühungen der Beobachter in dem Coupé, Schwerewirkung und Beschleunigung getrennt nachzuweisen, zuschanden machen. Wie ist es nun aber, wenn der Planet mit dem Coupé durch andere gewaltige Kräfte magnetische oder elektrische oder auch durch die Kraftwirkung eines gewaltigen Motors, der von einem andern Stern mit Hilfe eines Seiles an ihm zieht, in beschleunigte Bewegung versetzt wird? In diesem Fall muß man natürlich die der Beschleunigung entgegengesetzte Trägheitswirkung spüren und man sollte meinen, daß die Gelehrten in dem Einsteinschen Coupé nun die Beschleunigung absolut nachweisen könnten. Um aber einzusehen, daß das nicht der Fall ist, braucht man sich nur zu denken, es befände sich in der der wirkenden Kraft entgegengesetzten Richtung eine sehr große schwere Masse, deren Gravitationswirkung der Kraft gerade das Gleichgewicht hielte. Die Gravitation würde für sich allein eine Beschleunigung hervorbringen, die der wirklich vorhandenen entgegengesetzt gleich wäre, die Gelehrten in dem Coupé würden nicht entscheiden können, ob diese Schwerewirkung und die mit ihr verbundene Beschleunigung (die die zuerst betrachtete gerade aufheben würde) vorhanden wären oder nicht. Es wäre für ihre Beobachtungen demnach dasselbe, ob das Coupé durch das Seil mit beschleunigter Bewegung vorwärts gezogen würde oder ob es still an dem Seil in einem Schwerefeld hinge, wenn nur das Seil in beiden Fällen mit der gleichen Kraft zieht. Sie würden also nicht bloß die Trägheitswirkungen vollständig mit Schwerewirkungen verwechseln

können, sondern auch durch Michelson-Versuche und ähnliche Experimente zwischen beschleunigter Bewegung und Schwerefeldwirkung nicht entscheiden können. In dieser Form erscheint uns das Prinzip der allgemeinen Relativität der Bewegung als ein Prinzip der Äquivalenz von Schwere und Trägheit.

Da es die Aussage einschließt, daß man die beschleunigte Bewegung ebensowenig wie die konstante durch einen Michelsonschen Versuch und ähnliche Versuche nachweisen kann, so liegt es nahe, es für eine Verallgemeinerung des alten Relativitätsprinzips zu halten. Es ist aber für das Folgende von der größten Wichtigkeit, einen ganz fundamentalen Unterschied im Wesen der beiden Prinzipe auf das nachdrücklichste hervorzuheben.

Die Transformationen des alten Relativitätsprinzips der Bewegung sind rein geometrischer Natur, es wird nach der Ausdrucksweise Minkowskis durch sie nur eine Drehung des Koordinatensystems dargestellt, die Transformationen dagegen, die das Prinzip der Äquivalenz der Schwere und der Trägheit zum Ausdruck bringen, sollen (nach Einsteins ursprünglicher Absicht wenigstens) Hypothesen über das Vorhandensein wirklicher materieller Körper, wenn auch für die Beobachter nicht wahrnehmbarer Körper, in sich schließen.

Während es also nach dem Relativitätsprinzip der Bewegung unmöglich ist, von zwei Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit verschieben, das eine als das richtige und das andere als das falsche zu bezeichnen, gerade so wie es unmöglich ist, zwischen zwei im Raum gegeneinander gedrehten Koordinatensystemen einen solchen Wertunterschied zu machen, müssen wir die verschiedenen Koordinatensysteme, die das Einsteinsche Äquivalenzprinzip liefert, als wahr und falsch unterscheiden. Denn, wenn wir einen Körper hypothetisch annehmen, so heißt das doch, daß wir erwarten, die Existenz dieses Körpers, wenn er uns auch zurzeit unbekannt ist, schließlich einmal nachweisen zu können. Wenn beispielsweise unser Fixsternsystem auf einen in ungeheurer Ferne befindlichen riesigen dunklen Weltkörper hinstürzte, so müßten wir erwarten, daß schließlich das Fixsternsystem diesem Körper so nahe kommt, daß man ihn bemerken muß. Es würden schließlich Körper unseres Fixsternsystems auf ihn aufprallen, oder mit großer Geschwindigkeit ihn umkreisen, was man von der Erde aus beobachten könnte, er würde selber auch wohl irgendeine Strahlung aussenden, wenigstens als Reflex der Fixsternstrahlung, er kann Planeten haben, die man vielleicht sieht, usf. Selbst wenn er erst in Zeiten wahrnehmbar würde, wo die Menschheit längst untergegangen ist, so wäre es darum doch immer ein Irrtum, wenn wir seine Existenz leugnen, ein Irrtum, der veranlaßt ist durch die Mangelhaftigkeit unserer Sinnesorgane und Instrumente und die kurze Dauer unserer Beobachtungen, ein Irrtum, wie wir natürlich sehr viele in unserer Wissenschaft haben, ohne daß sie etwas schaden, aber doch immer ein Irrtum, weil die Welt objektiv, unabhängig von unserer Wahrnehmung existiert. Gerade in den Einsteinschen Theorien spielen so oft äußerst feine und zarte Wirkungen eine wichtige Rolle, von denen man sehr viele mit unseren groben Instrumenten niemals beobachten wird, und doch muß man annehmen, daß diese Wirkungen objektiv in der Welt auftreten, wenn man die betreffende Theorie für richtig erklärt; sonst würde man sich selber logisch widersprechen. Nehme ich einen materiellen Körper als existierend an, so muß ich damit zugleich auch annehmen, daß es irgendwelche Wirkungen gibt, wenn auch noch so zarte, durch die er erkennbar ist. Ein materieller Körper, der an sich selbst unwahrnehmbar ist, wäre ein logisches Unding, wie ein viereckiges Dreieck. Und somit enthielte im letzten Grunde das Prinzip der Äquivalenz von Schwere und Trägheit, wenn man es ganz allgemein fassen wollte, in sich selber einen untilgbaren logischen Widerspruch, weil es an sich undenkbar ist, einen wirklichen materiellen Körper durch rein mathematische Operationen in die Welt hinein oder aus ihr heraus zu eskamotieren.

Auf diese Schwierigkeit habe ich übrigens schon vor annähernd vier Jahren in einer Diskussion über die damals noch unvollkommene Einsteinsche Theorie aufmerksam gemacht. Er wird interessant sein, zu sehen, in welcher Weise in der nun vorliegenden vollendeten Theorie sich die einfache Logik der soeben gebrachten Darlegungen mathematisch widerspiegelt.

Um die physikalische Bedeutung des allgemeinen Relativitätsprinzips möglichst gründlich zu erfassen, will ich es einmal von einem andern Standpunkt aus ansehen, nämlich von dem Standpunkt, der für die Theorie der Materie der nächstliegende ist.

Die Theorie der Materie ist, kurz gesagt, die Vorstellung, daß alle elementaren Teilchen der Materie nichts weiter sind als Anhäufungsstellen enormer Energiemengen in sehr kleinen Gebieten des Äthers, Energieknoten, die der Äther ganz aus sich selber hervorbringt. Nach ihr gibt es also nur eine einheitliche Weltsubstanz, die wir Äther nennen, und die kleinen Knotenstellen angehäufter Energie in ihr täuschen uns

nur die Existenz materieller Teilchen vor, die vom Äther verschiedenartig zu sein scheinen. Es wird nun eine der ersten Aufgaben der Theorie sein, zu zeigen, wie sich solche Knotenstellen der Energie, die sich ganz verhalten, als ob sie harte und durch äußere Wirkungen wenig beeinflußbare Korpuskeln wären, herstellen können.

Während man bisher in der Ätherphysik nur Feldstärken kannte, elektrische, magnetische, Gravitations-Feldstärken, behauptet die Theorie der Materie, daß zur vollständigen Beschreibung des Zustandes des Äthers auch die Absolutwerte der Potentiale, also das elektromagnetische Viererpotential, welches sich aus dem elektrischen skalaren Potential und dem magnetischen Vektorpotential zusammensetzt, und das Gravitationspotential unentbehrlich sind. Die Theorie enthält also die Voraussagung, daß es der Experimentierkunst noch gelingen muß, Mittel zu finden, mit denen sie die Absolutwerte der Potentiale selbst in jedem Punkt des Äthers bestimmen kann, wenn sie bisher auch nur Feldstärken oder, was dasselbe ist, Potentialdifferenzen messen konnte. Ich habe vor, in dieser Richtung Versuche über das elektrische Potential anzustellen. Für das Gravitationspotential sagt die Einsteinsche Theorie schon in bestimmter Weise voraus, wie man es beobachten kann, es soll eine Verschiebung der Spektrallinien eines im Gravitationsfeld schwingenden Atoms bewirken, es soll die Lichtgeschwindigkeit beeinflussen usf. Bis zu einem gewissen Grade ist es allerdings willkürlich, wo man den Nullpunkt des Potentials annehmen will, so wie ja auch der Nullpunkt des Gasdrucks oder der Nullpunkt der Temperatur in gewisser Weise willkürlich ist. Aber wie es das Natürlichste ist, den Nullpunkt des Druckes in das Vakuum zu legen, den gasfreien Raum, so ist der natürlich gegebene Nullpunkt für die Potentiale in einem Raum zu suchen, der, unendlich weit entfernt von aller Materie, von elektromagnetischen und von Gravitationsfeldern nicht erreicht wird. Einen solchen Raum werde ich der Kürze wegen im folgenden das „ideale Vakuum" nennen. Im idealen Vakuum setzen wir das elektromagnetische Viererpotential gleich Null, dem Gravitationspotential dagegen soll hier nach Einstein der skalare Wert -1 beigelegt werden.

Eine Zusammenballung kolossaler Energiemengen, die wir als materielles Teilchen beobachten, wäre im Äther nicht möglich, wenn man in den ungeheuer intensiven Feldern der Zusammenballungsstelle, also „im Innern des materiellen Teilchens", dieselben Gesetzmäßigkeiten annehmen wollte, die in den verhältnismäßig schwachen Feldern, mit denen man experimentiert, nachgewiesen worden sind. Vor allem muß unbedingt ein Gesetz fallen, das in der bisherigen Ätherphysik eine sehr wichtige Rolle spielt, nämlich das Superpositionsprinzip. Dieses Prinzip sagt aus, daß das Feld, welches zwei Körper unter irgendwelchen Umständen zusammen hervorrufen, sich aus den Feldern, welche jeder der beiden Körper einzeln unter sonst unveränderten Umständen hervorrufen würde, nach den einfachen Regeln der geometrischen Addition ergibt. Es sagt also aus, daß sich die beiden Felder übereinander lagern, ohne sich gegenseitig zu stören. Wie wichtig dieses Prinzip in der Physik des Äthers ist, sieht man beispielsweise daraus, daß sich zwei Lichtstrahlen nicht glatt durchkreuzen würden, wenn es nicht gültig wäre. Und doch muß es in der Theorie der Materie als ein Näherungsgesetz betrachtet werden, das zwar bei den kleinen Feldstärken, die im eigentlichen Vakuum auftreten, mit einer ganz außerordentlich guten Näherung gilt, das aber im „Innern der materiellen Teilchen", wo infolge der enormen Feldstärken ganz andere Verhältnisse herrschen, vollkommen hinfällig wird. Um zu zeigen, wie die Grundgleichungen der Felder beim Fehlen des Superpositionsprinzips modifiziert werden müssen, will ich die Maxwellschen Gleichungen hinschreiben. Es seien

$\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}$ elektrische Feldstärke und Verschiebung,
$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$ magnetischer Kraftfluß und Feldstärke,
φ, $\mathfrak{f}$ skalares und Vektor-Potential,
ϱ, $\mathfrak{v}$ elektrische Ladung und Stromstärke,

dann kann man die Maxwellschen Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{e} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t}$$

$$\mathfrak{b} = \operatorname{rot} \mathfrak{f}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \mathfrak{v}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \varrho .$$

Das Superpositionsprinzip ist gültig, wenn, wie in der Maxwellschen Theorie angenommen wird, $\mathfrak{e}$ genau proportional $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ genau proportional $\mathfrak{h}$, im reinen Äther speziell $\mathfrak{e} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}$, wenn also Dielektrizität und Permeabilität absolut konstant ($= 1$) sind. Das soll nun in den starken Feldern im Innern der materiellen Teilchen nicht mehr der Fall sein. Man kann hier aber, wenn das Hamiltonsche Prinzip gilt, doch wenigstens die Zusammenhänge zwischen den Größen mit Hilfe einer einzigen Funktion darstellen, die explizit nur von den Zustandsgrößen abhängt, also von all den Größen, die zu einer vollständigen Schilderung des Zustandes des Äthers nötig sind. Diese Funktion habe ich die Weltfunktion genannt, ich pflege sie mit Φ zu

bezeichnen. Die physikalische Bedeutung von Φ ist, daß das Integral von Φ über den von einem „materiellen Teilchen" erfüllten Raumteil gleich der Ruh-Energie oder, was dasselbe ist, gleich der Ruh-Masse des Teilchens ist. Als die Zustandsgrößen, welche zur vollständigen Schilderung des Ätherzustandes notwendig, aber zugleich auch hinreichend sind, nehme ich an, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$, φ, $\mathfrak{f}$, ferner Gravitationspotential und Gravitationsfeldstärke, die ich durch g und $\mathfrak{g}$ andeuten will. Die Weltfunktion ist also:

$$\Phi(\mathfrak{e},\ \mathfrak{b},\ \varphi,\ \mathfrak{f},\ g,\ \mathfrak{g}).$$

Dann ist:

$$\mathfrak{d} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{e}},\ \mathfrak{h} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{b}},\ \mathfrak{v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{f}},\ \varrho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Für sehr kleine Werte der anderen Variabeln und g nahezu -1 muß Φ sich mit einer außerordentlich guten Annäherung als:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathfrak{e}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{b}^2 + \Phi_1$$

berechnen lassen, wo Φ_1 von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ frei ist, dann gilt für sehr kleine Feldstärken, das heißt im idealen Vakuum, das Superpositionsprinzip. Im idealen Vakuum sind dann Dielektrizität und Permeabilität konstant gleich 1; wo die Zustandsgrößen aber sehr stark von den Werten des idealen Vakuums abweichen, wo also der eben hingeschriebene Näherungswert von Φ nicht zu brauchen ist, hängen Dielektrizität und Permeabilität in hohem Maße von dem Zustand ab, in welchem sich der Äther an der betreffenden Stelle befindet.

Ganz Ähnliches läßt sich auch über die Gravitation sagen. Das Charakteristische der Einsteinschen Gravitationstheorie ist, daß in ihr das Potential des Gravitationsfeldes ein vierdimensionaler Tensor ist. Einstein nennt ihn:

$$\begin{matrix} g^{11}, & g^{12}, & g^{13}, & g^{14}, \\ g^{21}, & g^{22}, & g^{23}, & g^{24}, \\ g^{31}, & g^{32}, & g^{33}, & g^{34}, \\ g^{41}, & g^{42}, & g^{43}, & g^{44}, \end{matrix}$$

wobei $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$. Das Potential hat also 10 voneinander unabhängige Komponenten. Die Feldstärke der Gravitation bekommt man durch Differentiation des Potentials nach den Koordinaten: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = i \cdot t$ als:

$$\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Es ist das im Sinne der Minkowskischen Geometrie ein Tensor dritten Ranges, ich will ihn einen Tensoren-Vektor nennen, weil er sich zum gewöhnlichen Tensor so verhält, wie ein Vektor zum Skalar. Im Sinne der allgemeinen Invariantentheorie ist $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ übrigens kein Tensor dritten Ranges. Das Einsteinsche Gravitationsfeld hat nicht weniger als 40 Komponenten. In die oben hingeschriebene Weltfunktion Φ sind für g die $g^{\mu\nu}$ und für $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ als Argumente eingesetzt zu denken. Es gibt dann noch einen zweiten Tensorenvektor, den Einstein mit $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ bezeichnet und durch den man das Gravitationsfeld ebenfalls darstellen kann. Man könnte ihn die Erregung des Gravitationsfeldes nennen. Für diesen gelten die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{3}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{4}}{\partial x_4} = -h_{\mu\nu}$$

wo $h_{\mu\nu}$, ein vierdimensionaler Tensor, die Dichtigkeit der schweren Masse ist. Es klingt zunächst etwas sonderbar, daß die Dichtigkeit der schweren Masse, die uns als spezifisches Gewicht eine der geläufigsten Größen ist, uns hier nicht mehr als einfache Zahl, als Skalar entgegentritt, sondern 10 verschiedene voneinander unabhängige Komponenten haben soll. Aber das Rätsel löst sich gleich, wenn man weiß, daß praktisch in der Materie bei nicht zu großen Geschwindigkeiten die eine der Komponenten h_{44} alle anderen so stark überwiegt, daß die andern dagegen alle gestrichen werden können. Auch die Energie tritt in ähnlicher Weise in der vierdimensionalen Schreibweise der Relativitätstheorie bekanntlich als die (4,4)-Komponente eines Tensors auf. Das Vorwiegen der Komponente h_{44} hat weiter zur Folge, daß von allen vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes im allgemeinen nur die $\mathfrak{g}^{44}$ sich in den Kräftewirkungen des Feldes bemerkbar machen, und daß man daher im allgemeinen so rechnen kann, als ob das Gravitationsfeld ein einfacher Vektor wäre. Aber an der Anomalie der Merkurbahn spürt man doch schon das Mitwirken anderer Komponenten, weil der Merkur in einem sehr starken Gravitationsfeld läuft und ziemlich große Geschwindigkeiten hat.

Gravitationserregung und Dichtigkeit der schweren Masse berechnen sich nach dem Hamiltonschen Prinzip als:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}},\ h_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Da nun in der Einsteinschen Theorie der Teil von Φ, welcher die Feldstärken $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ enthält, vollständig gegeben ist, so kann man den Wert der $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ als Funktion der anderen Zustandsgrößen vollständig hinschreiben. Am einfachsten kann man sie durch die folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu} = \sum_1^4{}_\tau \left(g^{\mu\tau} \cdot \Gamma_{\tau\sigma}^{\nu} + g^{\nu\tau} \cdot \Gamma_{\tau\sigma}^{\mu}\right).$$

Gerade an dieser expliziten Form der Beziehung, welche die $\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ und die $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ verknüpft, sieht man sehr deutlich, daß das Verhältnis der beiden Tensorenvektoren, also diejenige Eigenschaft des Äthers, die im Gravitationsfelde das Analogon zu der Dielektrizität im elektrischen Felde ist, von dem Zustande des Äthers, nämlich vom Gravitationspotential abhängt. Das ist durchaus vergleichbar mit der Tatsache, daß die Dielektrizitätskonstante und andere physikalischen Konstanten eines greifbaren Stoffes von seiner Temperatur und von seinem sonstigen Zustand abhängen. Nur im idealen Vakuum, wo der Tensor der $g^{\mu\nu}$ den skalaren Wert -1 annimmt, also:

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = g^{44} = -1, \quad g^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu,$$

wird die Beziehung zwischen den $\mathfrak{g}$ und den Γ rein linear:

$$\mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu} = -(\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}),$$

und nunmehr gilt das Superpositionsprinzip für die Gravitationsfelder.

Die Ungültigkeit des Superpositionsprinzips aber im Innern der „materiellen Teilchen" führt uns zu einem Problem, dessen Lösung für die Theorie der Materie von fundamentaler Bedeutung sein wird.

(Fortsetzung folgt.)

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Heidelberg Dr. Ernst Wilke für Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Lothar Schrutka Edler v. Rechtenstamm zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der Oberingenieur der Österreichischen Siemens-Schuckertwerke in Wien Oskar Primavesi zum ord. Professor der Elektrotechnik II an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn, an der Technischen Hochschule Warschau Dr. Boleslaus Miklaszewski zum ord. Professor für chemische Technologie und Dr. Stanislaus Gliksell für analytische Chemie.

Berufen: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Constantin Carathéodory in gleicher Eigenschaft an die Universität Berlin.

Rücktritt vom Staatsdienst: Der ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Gustav Rasch (unter Verleihung des Titels Geheimer Regierungsrat).

Gestorben: Der a. o. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Erlangen Dr. Eduard Jordis (als Bataillonskommandeur auf dem Schlachtfeld gefallen).

Angebote.

Physiker

Wir suchen

wissenschaftliche Mitarbeiter,

welche auf den Gebieten der Optik, der Reproduktionstechnik oder der Kinematographie besondere Kenntnis und Erfahrungen besitzen.

Ernemann-Werke, A.-G., Dresden.

Physiker,

möglichst mit Erfahrungen auf dem Gebiete der Gasentladungen, sowie im Bau und in der Prüfung von Schwachstromapparaten zum sofortigen Eintritt gesucht.

Geeignete Bewerber wollen Angebote mit Lebenslauf und Zeugnisabschriften einreichen an:

AEG Kabelwerk Oberspree,
Berlin-Oberschöneweide.

Für mein **Privatlaboratorium** suche ich einen jungen promovierten

Physiker

als Assistenten. Erfahrungen in aerodynamischen und elektrischen Messungen erwünscht. Kriegsverletzte Bewerber wollen berücksichtigen, daß Treppensteigen notwendig. Bewerbungen mit kurzem Lebenslauf, Gehaltsansprüchen, Angabe des Militärverhältnisses erbeten an **Prof. von dem Borne, Berlin C. 2,** Neue Friedrichstraße 1.

Gesuche.

Physiker (promoviert)

sucht Stellung. Unter **S. H. 506** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift in Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

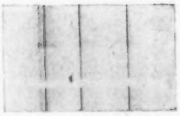

Fig. 1. Die Röntgenspektren [α-Reihe] der Elemente *Pb—RaG*.

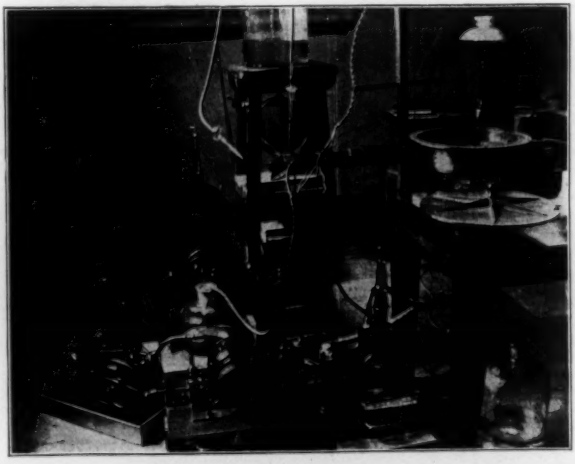

Fig. 3. Versuchsanordnung mit Röntgenrohr zur Aufnahme der *M*-Reihe.